الأستاذ: رويبح محمد

سلسلة تاج العلوم

الباز في الرياضيات

علوم تجريبية

- الدوال
- المتتاليات
- الهندسة

3 الثالثة ثانوي

حسب مقرر وزارة التربية الوطنية

BAC

دار قرطبة

الباز في الرياضيات

السنة الثالثة ثانوي
علوم تجريبية

- الدوال.
- المتتاليات.
- الهندسة: الأعداد المركبة ...

الأستاذ: محمد رويبح

منشورات قرطبة وغرناطة

بسم الله الرحمن الرحيم

بعد قراءة متأنية وواعية لمحتوى البرنامج المخصص للسنة الثالثة شعبة : العلوم التجريبية يتبين أن له ثلاث ركائز أساسية يقوم عليها بناؤه وهي:

التحليل	1. دراسة دالة صماء، مثلثية، أسية، لوغاريتمية (المشتق، القيم الحدية،السلوك التقاربي لدالة، التمثيل البياني والقراءة البيانية لمنحن). 2. توظيف دوال صماء، ، مثلثية، أسية، لوغاريتمية في حل مشكلات من الواقع. 3. حلّ مسائل الاستمثال (البحث عن القيم المثلى) باستعمال الدوال أعلاه. 4. توظيف الحساب التكاملي لحساب مساحات مستوية ولحل مشكلات 5. دراسة سلوك متتالية (اتجاه التغير، التقارب، ...) 6. توظيف المتتاليات لحل مشكلات.
الهندسة	1. توظيف الأعداد المركبة لمعالجة وضعيات بسيطة تتعلق بخواص الأشكال الهندسية. 2. حل مسائل في التحويلات النقطية المألوفة بتوظيف الأعداد المركبة. 3. توظيف الجداء السلمي في الفضاء لتعيين معادلة ديكارتية لمستو ولحساب المسافة بين نقطة ومستو، وللبرهان على خواص التعامد ولتعيين مجموعات النقط. 4. توظيف معادلات ديكارتية وتمثيلات وسيطية لتعيين تقاطع مستويات ومستقيمات. 5. حل مسائل حول محال هندسية وإنشاءات هندسية باستعمال الأداة الأكثر نجاعة (الأعداد المركبة، التحويلات النقطية، المرجح، الهندسة البحتة...).
الإحصاء والاحتمالات	1. توظيف خواص الاحتمالات لحل مسائل بسيطة تعالج ظواهر عشوائية وبصفة خاصة تلك الظواهر التي تعتمد على الاحتمالات المتساوية.

2. توظيف قوانين في التحليل التوفيقي لحل مسائل في الاحتمالات.
3. حل مسائل تتعلق بتكرار تجربة وذلك باستعمال قوانين الاحتمالات المنتظمة المتقطعة، قانون برنولي، القانون الثنائي.
4. حل مسائل تتدخل فيها المتغيرات العشوائية المتقطعة و/أو المستمرة والتي يمكن إيجاد قانون احتمالها ببساطة.
5. توظيف المحاكاة لتقرير تلاءم معطيات تجربة واقعية مع نموذج احتمالي مقترح.

(نكتفي بنموذج احتمالي متساو)

كما أن هذه المفاهيم حُددت لها منهجية خاصة لتناولها تقوم أساسا على الأنشطة المختلفة التي يساهم فيها المتعلم بشكل فعال وأساسي أما دور المعلم فهو التوجيه والملاحظة والتدخل أحيانا قليلة وتُختار هذه الأنشطة بطريقة **تقارب فيها المفاهيم المستهدفة.**
كما أن جزءا من هذه الأنشطة يُختار من الواقع الاجتماعي حتى يكون للمعرفة المكتسبة معنى حسي وتختفي تلك الهُوة التي كانت تفصل المفاهيم الرياضية المجردة عن المشاكل المعيشة – على الأقل في هذه المرحلة –
ويجاب على السؤال القديم الجديد ما جدوى دراسة الرياضيات ؟
وهذه المقاربة بين الأنشطة (الكفاءات) والمفاهيم المستهدفة هي إحدى طرائق التدريس المسماة: " **المقاربة بالكفاءات**"
والخلاصة: **《 أن المتعلم يصنع المعرفة بنفسه ولا يتلقاها من الآخرين تلقينا 》**
وهذا ما يجعله مفكرا مبدعا مستغلا لمعارفه في واقع حياته، بدل أن يكون عاجزا عن التفكير، مسلوب الإرادة وعالة على الآخرين.
بهذه الملاحظات وغيرها قمت بهذا العمل المتواضع والذي آمل منه أن يساهم ولو بجزء يسير في إثراء معارف المتعلم في هذه المرحلة من التعليم وإثراء مكتبة الرياضيات .
والمنهجية التي اتبعتها لإنجاز هذا العمل تقوم على ثلاث مراحل:
الأولى: التذكير - بإيجاز - بالمعارف ذات الصلة وبالخواص وبالطرائق المختلفة و... لاستعمالها في معالجة التمارين المقترحة.
الثانية: اقتراح تمارين منوعة ومتفاوتة الصعوبة تنسجم والمفهوم المستهدف.
الثالثة: اقتراح حلول للتمارين المقترحة، ولقد حاولت قدر الإمكان أن يكون الحل مفصلا مراعاة لمستوى المتعلم وظروفه في هذه المرحلة.
الرابعة: اقتراح تمارين ومسائل غير محلولة في نهاية كل فصل وهي بمثابة تقويم ذاتي ينتج عنه تحديد مستوى الاستيعاب للمفاهيم المدروسة .

والله الموفق

الـــــدوال العدديـــة

الدالة العددية لمتغير حقيقي :

ترفق بكل عدد حقيقي x ، عددا حقيقيا وحيدا ونرمز إليها بالرمز f أو g أو h أو...
ولأجل الاختصار نقول : دالة عددية دون ذكر كلمة " لمتغير حقيقي".أو نقول : دالة فقط.
نرمز إلى مجموعة تعريف دالة f بالرمز $\mathbf{D}$ أو $\mathbf{D}_f$ وهي :
مجموعة الأعداد الحقيقية x بحيث : $f(x)\in\mathbb{R}$.
وللتعبير عن الدالة f نكتب : $f:D\to\mathbb{R}$

$x\mapsto f(x)$ (لاحظ الفرق بين السهمين)

والعدد الحقيقي $f(x)$ هو **صورة** x بالدالة f ، كما أن x **سابقة** للعدد $f(x)$

أمثلة على مجموعة تعريف دالة:

1- f الدالة المعرفة بالعبارة $f(x)=-5x^2+3$

إن $\mathbf{D}=\mathbb{R}$ لأن : من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x)\in\left]-\infty,+\infty\right[$.

إذا كانت عبارة الدالة كثير حدود فإن : $\mathbf{D}=\left]-\infty,+\infty\right[$

2- f الدالة المعرفة بالعبارة $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$

إن $\mathbf{D}=\left]-\infty,-2\right[\cup\left]-2,+2\right[\cup\left]+2,+\infty\right[$ ، لأن :

$f(x)=\dfrac{1}{0}\notin\mathbb{R}$ (اكتشف هذا بالآلة الحاسبة)

3- f الدالة المعرفة بالعبارة $f(x)=\dfrac{-2x+3}{-2x^2-x+3}$

لا يمكننا تعيين الأعداد الحقيقية التي تجعل المقام معدوما مباشرة ، نلجأ إلى الآتي :

- نحل المعادلة $-2x^2-x+3=0$ فنجدها تقبل حلين هما : $x_1=1,x_2=-\dfrac{3}{2}$
- $\mathbf{D}=\left]-\infty,-\dfrac{3}{2}\right[\cup\left]-\dfrac{3}{2},1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$

إذا كانت عبارة الدالة كسرا ناطقا فإن:

$\mathbf{D}=\mathbb{R}-\{$الأعداد الحقيقية التي تجعل المقام يساوي 0$\}$

ولتعين الأعداد الحقيقية التي تجعل المقام يساوي **0** بإحدى الطريقتين الآتيتين :
1) **بالملاحظة** والاستنتاج (المثال2) .
2) بحل المعادلة : **المقام = 0** في $\mathbb{R}$ (المثال3).

5- f الدالة المعرفة بالعبارة $f(x)=\sqrt{x}$

إن $\mathbf{D}=\left[0,+\infty\right[$ ، لأن : إذا كان $x<0$ فإن $f(x)\notin\mathbb{R}$ (اكتشف هذا بالآلة الحاسبة)

6- f الدالة المعرفة بالعبارة $f(x)=\sqrt{x^2+x-2}$

لا يمكننا تعيين الأعداد الحقيقية التي تجعل العبارة ...

فنلجأ إلى الآتي:

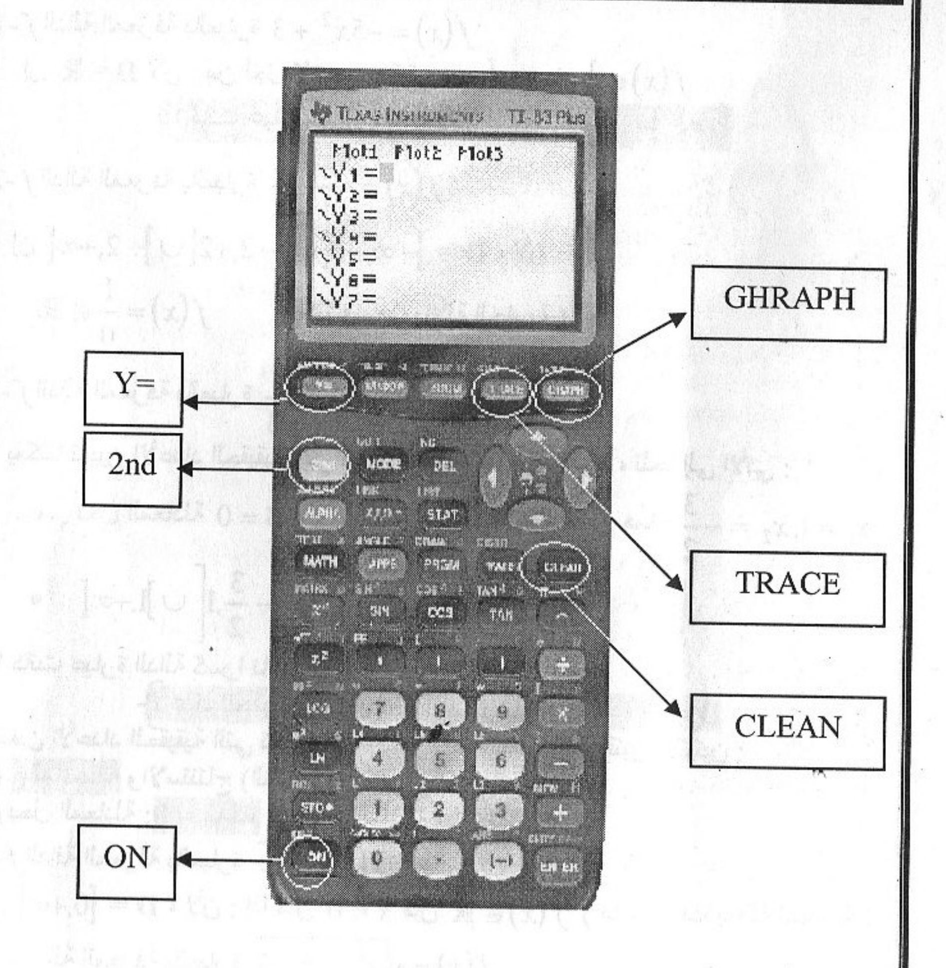
- نحل المتراجحة $x^2+x-2\geq 0$ فنجد حلولها وهي: $]-\infty,-2]\cup[1,+\infty[$
- $D =]-\infty,-2]\cup[1,+\infty[$

إذا كانت عبارة الدالة من الشكل $f(x)=\sqrt{g(x)}$ فإن:

D هي مجموعة حلول المتراجحة : $g(x)\geq 0$

المنحنى الممثل لدالة عددية f هو مجموعة النقط من المستوي ، المزود بمعلم (O,I,J) ،
والتي إحداثياتها $(x,f(x))$ و x من مجموعة التعريف D . ويتم التمثيل بطرق منها :

① الآلة الحاسبة البيانية كـ : (TI-83+) وهي الأكثر استعمالا وهذه صورتها :

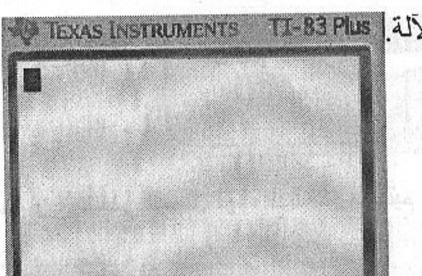


التمثيل البياني للدالة $f:\mapsto x-1+\dfrac{2}{x-2}$ في معلم متعامد ومتجانس

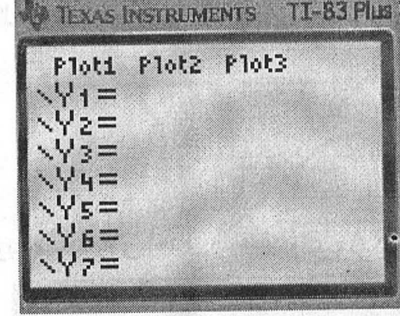
باستعمال +TI-83

- نشعل الآلة بالضغط على اللمسة [ON] فتظهر الشاشة :

هذا إذا استعملت اللمسة [CLEAN] قبل غلق الآلة.

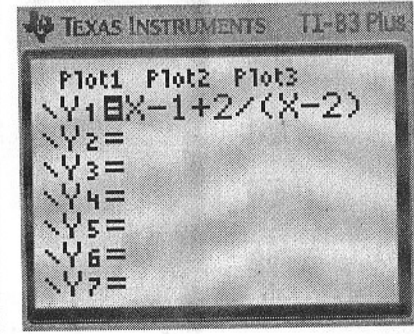


- نضغط على اللمسة [Y=] فتظهر الشاشة الآتية :



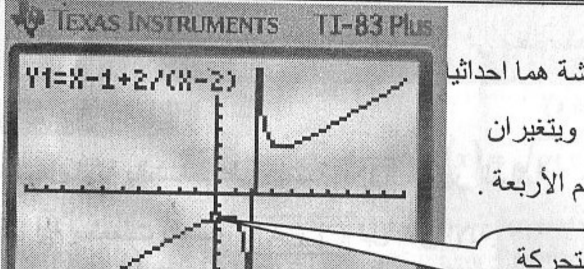
نحجز(نكتب) العبارة الدالة : $x-1+\dfrac{2}{x-2}$

وفق لغة الآلة كما هو مبين في الشكل المقابل
باستعمال لوحة مفاتيح الحاسبة ، فتظهر الشاشة :



- نضغط على اللمسة [TRACE] فتظهر الشاشة :

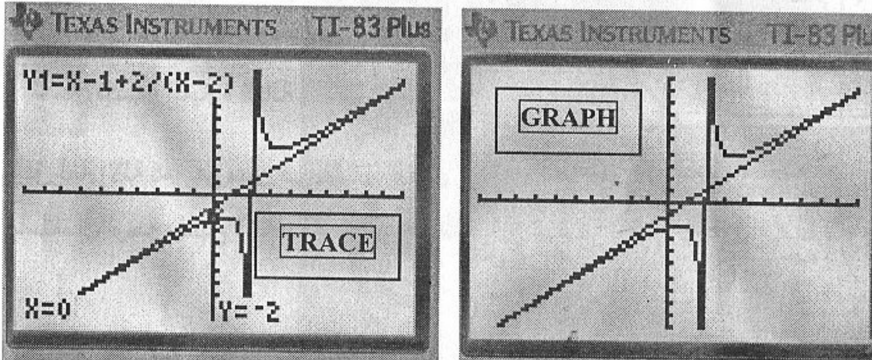
إن الرقمين الظاهرين أسفل الشاشة هما احداثيا النقطة المتحركة على المنحني ، ويتغيران بتغير موضعها، باستعمال الأسهم الأربعة .

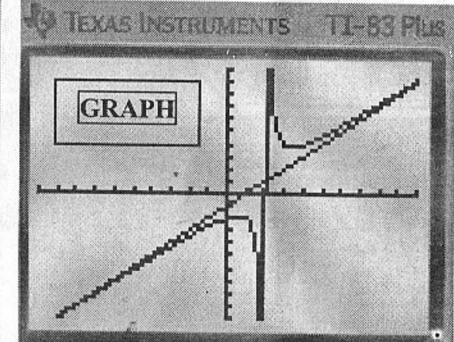


وبما أن المنحني الممثل لهذه الدالة له مستقيم مقارب معادلته $y=x-1$ فحتى يكتمل الرسم بظهوره في نفس المعلم ، نحجز العبارة $x-1$ في Y_2 كما في الشكل الآتي:

```
TEXAS INSTRUMENTS   TI-83 Plus
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=X-1+2/(X-2)
\Y2=X-1
\Y3=
\Y4=
\Y5=
\Y6=
\Y7=
```

وبالضغط على إحدى اللمستين TRACE أو GRAPH نحصل على الشاشتين الآتيتين:





وهذا هو المنحني الممثل للدالة $f:\to x-1+\dfrac{2}{x-2}$

أو نضغط على اللمسة فتظهر الشاشة :

أخيرا وبعد رسم التمثيل البياني للدالة ، لنا الخياران إما أن نحتفظ به لاستعمال لاحق فنضغط على اللمسة 2nd ثم على اللمسة OFF لغلق الحاسبة.

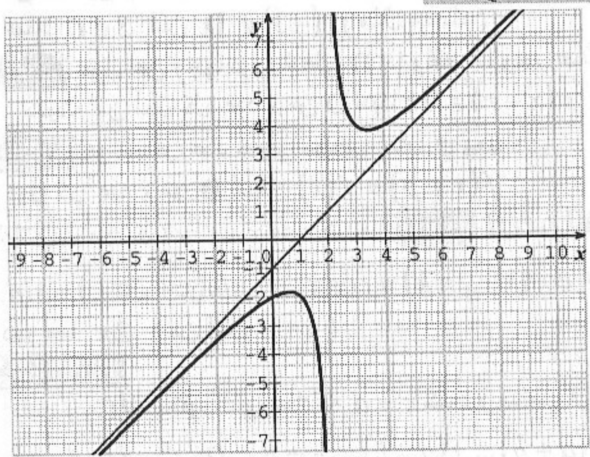
أو نحذفه نهائيا بالضغط على اللمسة CLEAN ومن ثم على اللمسة OFF

فاللمسة CLEAN تمحو المخزون في الذاكرة وتستعمل قبل بداية أي عمل جديد .

② باستعمال برمجية مناسبة (Logiciel) كـ : SINQUANON أو غيره .

التمثيل البياني للدالة $f:\to x-1+\dfrac{2}{x-2}$ في معلم متعامد ومتجانس

باستعمال البرمجية SINQUANON



③ يدويا بعد دراسة الدالة. (سيأتي)

الدالة الزوجية والدالة الفردية : f دالة مجموعة تعريفها **D**

- نقول عن f إنها زوجية على **D** إذا كانت **D** متناظرة بالنسبة إلى 0 وكان $f(-x)=f(x)$ من أجل كل عدد x من **D**.

ويكون المنحني الممثل للدالة الزوجية في المستوي المزود بمعلم متعامد يكون متناظرا بالنسبة إلى محور التراتيب.

- نقول عن f إنها فردية على **D** إذا كانت **D** متناظرة بالنسبة إلى 0 وكان $f(-x)=-f(x)$ من أجل كل عدد x من **D**.

ويكون المنحني الممثل للدالة الفردية في المستوي المزود بمعلم يكون متناظرا بالنسبة إلى المبدأ O .

أمثلة :1- الدالة $f:x\mapsto x^2-5$ زوجية على $\mathbb{R}$ ، لأن :

- المجموعة $\mathbb{R}$ متناظرة بالنسبة إلى 0.

• من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $f(-x)=(-x)^2-5=x^2-5=f(x)$

2- الدالة $f : x\mapsto -\frac{2}{x}$ فردية على $\mathbb{R}^*$ ، لأن :

• المجموعة $\mathbb{R}^*$ متناظرة بالنسبة إلى 0.

• من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x لدينا :

$$f(-x)=-\frac{2}{-x}=-\left(-\frac{2}{x}\right)=-f(x)$$

3- الدالة $f : x\mapsto\sqrt{x}$ ليست زوجية وليست فردية على $\mathbf{D}=[0,+\infty[$

لأن $\mathbf{D}$ غير متناظرة بالنسبة إلى 0 .

فمثلا $3\in\mathbf{D}$ لكن $(-3)\notin\mathbf{D}$.(مثال مضاد)

الدالة الدورية : نقول عن f إنها دورية على $\mathbf{D}$ إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي غير معدوم r بحيث من أجل كل عدد x من $\mathbf{D}$ لدينا : $(x+r)\in\mathbf{D}$ و $f(x+r)=f(x)$.

ودور الدالة f : هو أصغر عدد حقيقي موجب تماما p بحيث :

من أجل كل عدد x من $\mathbf{D}$ لدينا : $f(x+p)=f(x)$.

فمثلا: الدلتان $x\mapsto \sin x$ و $x\mapsto \cos x$ **دوريتان** لأن من أجل كل عدد حقيقي x

$\sin(x+2\pi k)=\sin x$ و $\cos(x+2\pi k)=\cos x$ ، حيث $k\in\mathbb{Z}^*$

ودورهما 2π (من أجل $k=1$) .

محور ومركز تناظر:

• يقبل (C_f) المستقيم الذي معادلته $x=a$ كمحور تناظر في معلم متعامد إذا كان من أجل كل h بحيث $a\pm h\in D_f$ ، $f(a+h)=f(a-h)$

• يقبل (C_f) النقطة $\Omega(a,b)$ كمركز تناظر في معلم متعامد إذا كان من أجل كل h بحيث $a\pm h\in D_f$ ، $\frac{f(a+h)+f(a-h)}{2}=b$

عمليات على النهايات l_1 و l_2 عددان حقيقيان وهما – على الترتيب – نهايتا الدالتين f و g عندما يؤول x إلى نفس القيمة a ، ليكن λ عددا حقيقيا ثابتا.

نقبل أن : – نهاية $(f+g)$ هي l_1+l_2 عندما يؤول x إلى القيمة a.

– نهاية $(f\times g)$ هي $l_1\times l_2$ عندما يؤول x إلى القيمة a.

– نهاية (λf) هي λl_1 عندما يؤول x إلى القيمة a.

– وإذا كان $l_2\neq 0$ فإن نهاية $\left(\frac{f}{g}\right)$ هي $\frac{l_1}{l_2}$ عندما يؤول x إلى القيمة a.

بعض الأفكار لحساب النهايات توجد حالات لا نستطيع فيها تطبيق القواعد السابقة مباشرة لحساب النهايات فنلجأ إلى طرائق غير مباشرة . وعدد هذه الحالات **أربع** وتسمى :

" **حالات عدم التعيين** " وهاهي اختصارا :

(1) إذا كانت $\lim f=+\infty$ و وكانت $\lim g=-\infty$ فإن $\lim(f+g)$ لا يمكن تعيينها

أي أننا لا نستطيع حساب الآتي: $\overbrace{(\ )}^{+\infty}+\overbrace{(\ )}^{-\infty}$

(2) إذا كانت $\lim f=\pm\infty$ و وكانت $\lim g=0$ فإن $\lim(f\times g)$ لا يمكن تعيينها

أي أننا لا نستطيع حساب الآتي: $\overbrace{(\ )}^{\pm\infty}\times\overbrace{(\ )}^{0}$

(3) إذا كانت $\lim f=\pm\infty$ و وكانت $\lim g=\pm\infty$ فإن $\lim\left(\frac{f}{g}\right)$ لا يمكن تعيينها

أي أننا لا نستطيع حساب الآتي: $\frac{\overbrace{(\ )}^{\pm\infty}}{\underbrace{(\ )}_{\pm\infty}}$

(4) إذا كانت $\lim f=0$ و كانت $\lim g=0$ فإن $\lim\left(\frac{f}{g}\right)$ لا يمكن تعيينها

أي أننا لا نستطيع حساب الآتي: $\frac{\overbrace{(\ )}^{0}}{\underbrace{(\ )}_{0}}$

وإذا صادفتنا الحالة (1) فمثلا : $\lim_{x\to+\infty}(x^2-x+1)=+\infty-\infty ?$ نلجأ إلى الطريقة الآتية :

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2-x+1)=\lim_{x\to+\infty}x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=\left(\lim_{x\to+\infty}x^2\right)\times\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=+\infty$$

وقد نستعمل المبرهنة الآتية :

إذا كانت عبارة f كثير حدود فإن نهاية f عندما يؤول x إلى $-\infty$ أو $+\infty$ هي نهاية الحد الأكبر درجة عندما يؤول x إلى $-\infty$ أو $+\infty$.

المثال السابق :

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2-x+1)=\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$$

وإذا صادفتنا الحالة (3) فمثلا : $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x-1}=\frac{+\infty}{+\infty}?$ نلجأ إلى الطريقة الآتية :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}=1$$

وقد نستعمل المبرهنة الآتية :

إذا كانت عبارة f كسرا ناطقا(كثير حدود على كثير حدود) فإن نهاية f عندما يؤول x إلى $-\infty$ أو $+\infty$ هي نهاية حاصل قسمة الحد الأكبر درجة في البسط على الحد الأكبر درجة المقام عندما يؤول x إلى $-\infty$ أو $+\infty$.

المثال السابق : $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$

وإذا صادفتنا الحالة (4) فمثلا : $\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{-x^2-2x-3}=\frac{0}{0}$? نلجأ إلى الطريقة الآتية :

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{-x^2-2x+3}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(-x-3)}=\lim_{x\to1}\frac{x-2}{-x-3}=\frac{1}{4}$$

ملاحظة: كل كثير حدود ينعدم عند العدد الحقيقي a يُحلل إلى جداء عوامل أحدها $(x-a)$

السلوك التقاربي لمنحن (المقاربات)

- إذا كانت $\lim_{x\to a}f(x)=\pm\infty$
فإن المستقيم العمودي ذا المعادلة $x=a$ مقارب للمنحني (C_f)
- إذا كانت $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=b$
فإن المستقيم الأفقي ذا المعادلة $y=b$ مقارب للمنحني (C_f)
- إذا كانت $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$
فإن المستقيم ذا المعادلة $y=ax+b$ مقارب مائل للمنحني (C_f) .
- عموما , إذا كانت $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-g(x)]=0$ فإن المنحنيين (C_f) , (C_g) متقاربان

وملخص هذا وغيره تجده في المخطط الآتي :

للسلوك التقاربي للمنحنى أحوال ثلاث وهي :

❶ $\lim_{x\to a}f(x)=\pm\infty$
- إن للمنحني مستقيما مقاربا يوازي $(y'y)$ معادلته : $x=a$

❷ $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=b$
- إن للمنحني مستقيما مقاربا يوازي $(x'x)$ معادلته : $y=b$

❸ $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\pm\infty$
- $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$
  - $\pm\infty$: إن للمنحني فرعا من قطع مكافئ يوازي $(y'y)$.
  - 0 : إن للمنحني فرعا من قطع مكافئ يوازي $(x'x)$.
  - $a\in\mathbb{R}-\{0\}$: $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-ax]$
    - $\pm\infty$: إن للمنحني فرعا من قطع مكافئ في اتجاه المستقيم الذي معادلته $y=ax$
    - $b\in R$: إن للمنحني مستقيما مقاربا معادلته : $y=ax+b$

التمارين المقترحة

التمرين1

عين مجموع تعريف الدوال الآتية :

$f(x)=|x|-3x \ ...(1)$ $\quad f(x)=|3-2x| ...(2)$ $\quad f(x)=(x^2-4)(x-5)...(3)$

$f(x)=\dfrac{1}{x-2}...(4)$ $\quad f(x)=\dfrac{x+3}{3x-2}...(5)$ $\quad f(x)=\dfrac{x}{|x-3|}...(6)$

$f(x)=\dfrac{3x-1}{x^2-9}...(7)$ $\quad f(x)=\dfrac{2x+3}{x(x+1)}...(8)$ $\quad f(x)=\dfrac{3x-2}{3x^2+5}...(9)$

$f(x)=\dfrac{-2}{(2x+1)^2-4}...(10)$ $\quad f(x)=\dfrac{2-x}{(2x+1)(x^2-4)}...(11)$

$f(x)=\sqrt{x^2-4}...(12)$ $\quad f(x)=\sqrt{x^2+16}...(13)$

$f(x)=\sqrt{-2x+1}...(14)$ $\quad f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}...(15)$ $\quad f(x)=\sqrt{\dfrac{x+2}{x-4}}$

الحل

$f(x)=|x|-3x \ ...(1)$ $\quad f(x)=|3-2x| ...(2)$ $\quad f(x)=(x^2-4)(x-5)...(3)$

مجموعة التعريف هي : $\mathbf{D}=\mathbb{R}$ وتكتب – أيضا – $\mathbf{D}=]-\infty,+\infty[$

لأنها دوال كثيرة حدود.

$f(x)=\dfrac{1}{x-2}...(4)$

الدالة f معرفة إذا وفقط إذا كان : $x-2\neq 0$ ، أي أن الدالة f معرفة إذا وفقط إذا كان : $x\neq 2$. ومجموعة التعريف هي : $\mathbf{D}=]-\infty,2[\cup]2,+\infty[$

$f(x)=\dfrac{x+3}{3x-2}...(5)$

الدالة f معرفة إذا كان : $3x-2\neq 0$ ، وهذا يكافئ: $x\neq\dfrac{2}{3}$.

ومجموعة التعريف هي : $\mathbf{D}=\left]-\infty,\dfrac{2}{3}\right[\cup\left]\dfrac{2}{3},+\infty\right[$

$f(x)=\dfrac{x}{|x-3|}...(6)$

تكون الدالة f معرفة عندما يكون $|x-3|\neq 0$. لكن $|x-3|\neq 0$ يكافئ $x-3\neq 0$
ويكافئ $x\neq 3$ ومجموعة التعريف هي : $\mathbf{D}=]-\infty,3[\cup]3,+\infty[$

لاحظ الصيغ المختلفة – وهناك صيغ أخرى – لتحرير الإجابة

$f(x)=\dfrac{3x-1}{x^2-9}...(7)$

تكون الدالة f معرفة عندما يكون $x^2-9\neq 0$.
لكن $x^2-9\neq 0$ يكافئ $x\neq -3$ و $x\neq 3$
ومجموعة التعريف هي : $\mathbf{D}=]-\infty,-3[\cup]-3,+3[\cup]+3,+\infty[$

$f(x)=\dfrac{2x+3}{x(x+1)}...(8)$

تكون الدالة f معرفة عندما يكون $x(x+1)\neq 0$.
لكن $x(x+1)\neq 0$ يكافئ $x\neq 0$ و $x\neq -1$
ومجموعة التعريف هي : $\mathbf{D}=]-\infty,-1[\cup]-1,0[\cup]0,+\infty[$

$f(x)=\dfrac{3x-2}{3x^2+5}\ ...(9)$

تكون الدالة f معرفة عندما يكون $3x^2+5\neq 0$.
لكن $3x^2+5\neq 0$ محقق من أجل كل عدد حقيقي x
ومجموعة التعريف هي : $\mathbf{D}=]-\infty,+\infty[$.

موجب أو معدوم + موجب تماما >0

$f(x)=\dfrac{-2}{(2x+1)^2-4}...(10)$

تكون الدالة f معرفة عندما يكون $(2x+1)^2-4\neq 0$.
لكن $x(x+1)\neq 0$ يكافئ $[(2x+1)-2][(2x+1)+2]\neq 0$ وهذا يكافئ
$(2x-1)(2x+3)\neq 0$ ويكافئ – أيضا – : $x\neq -\dfrac{3}{2}$ و $x\neq\dfrac{1}{2}$

ومجموعة التعريف هي : $\mathbf{D}=\left]-\infty,-\dfrac{3}{2}\right[\cup\left]-\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2}\right[\cup\left]\dfrac{1}{2},+\infty\right[$

$f(x)=\dfrac{2-x}{(2x+1)(x^2-4)}...(11)$

تكون الدالة f معرفة عندما يكون $(2x+1)(x^2-4)\neq 0$.

لكن $(2x+1)(x^2-4)\neq 0$ يكافئ $x\neq -\frac{1}{2}$ و $x\neq -2$ و $x\neq +2$

ومجموعة التعريف هي : $D =]-\infty,-2[\cup]-2,-\frac{1}{2}[\cup]-\frac{1}{2},+2[\cup]+2,+\infty[$

$f(x)=\sqrt{x^2-4}\ldots(12)$

تكون الدالة f معرفة عندما يكون $x^2-4\geq 0$.

لكن $x^2-4\geq 0$ يكافئ $(x-2)(x+2)\geq 0$

ولحل هذه المتراجحة ندرس إشارة الجداء $(x-2)(x+2)$.

x	$-\infty$		-2		$+2$		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+2$		$-$		$-$	0	$+$	
الجداء		$+$	0	$-$	0	$+$	
المتراجحة		✓		×		✓	

ومجموعة التعريف هي : $D =]-\infty,-2]\cup[+2,+\infty[$

$f(x)=\sqrt{x^2+16}\ldots(13)$

تكون الدالة f معرفة عندما يكون $x^2+16\geq 0$ ، وهذا محقق من أجل كل عدد حقيقي x .

ومجموعة التعريف هي : $D =]-\infty,+\infty[$

$f(x)=\sqrt{-2x+1}\ldots(14)$

تكون الدالة f معرفة عندما يكون $-2x+1\geq 0$.

لكن $-2x+1\geq 0$ يكافئ $x\leq\frac{1}{2}$ ومجموعة التعريف هي : $D =]-\infty,\frac{1}{2}]$

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}\ldots(15)$

تكون الدالة f معرفة عندما يكون $x-1\geq 0$ و $\sqrt{x-1}\neq 0$

لكن ($x-1\geq 0$ و $\sqrt{x-1}\neq 0$) يكافئ $x-1>0$ وهذا يكافئ $x>1$

ومجموعة التعريف هي : $D =]1,+\infty[$

$f(x)=\sqrt{\frac{x+2}{x-4}}\ldots(16)$

تكون الدالة f معرفة عندما يكون $\frac{x+2}{x-4}\geq 0$ و $x-4\neq 0$

لكن $\frac{x+2}{x-4}\geq 0$ و $x-4\neq 0$ يكافئ $(x+2)(x-4)\geq 0$ و $x\neq 4$

نفس طريقة الدالة (12) ومجموعة التعريف هي : $D =]-\infty,-2]\cup]+4,+\infty[$

التمرين 2

عين مجموعة تعريف الدوال الآتية ثم أذكر فيما إذا كانت زوجية أو فردية :

$f(x)=x|x|\ldots(1)\quad f(x)=x^2|x|\ldots(2)\quad f(x)=\frac{x}{1+|x|}\ldots(3)$

$f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}\ldots(4)\quad f(x)=x+\frac{1}{x}\ldots(5)\quad f(x)=\frac{|x|}{x^2-1}\ldots(6)$

$f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-4}\ldots(7)\quad f(x)=\frac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{4-x^2}}\ldots(8)\quad f(x)=\sqrt{\frac{x^2-16}{4-x^2}}\ldots(9)$

الحل

$f(x)=x|x|\ldots(1)$

مجموعة التعريف هي : $D =]-\infty,+\infty[$

إن D متناظرة بالنسبة إلى 0 ، ومن أجل كل عدد x من D لدينا :

$$f(-x)=(-x)|-x|=-x|x|=-f(x)$$

والدالة f فردية على D .

$f(x)=x^2|x|\ldots(2)$

مجموعة التعريف هي : $D =]-\infty,+\infty[$

إن D متناظرة بالنسبة إلى 0 ، ومن أجل كل عدد x من D لدينا :

$$f(-x)=(-x)^2|-x|=x^2|x|=f(x)$$

والدالة f زوجية على D .

$f(x)=\frac{x}{1+|x|}\ldots(3)$

مجموعة التعريف هي : $D =]-\infty,+\infty[$

إن D متناظرة بالنسبة إلى 0 ، ومن أجل كل عدد x من D لدينا :

$$f(-x)=\frac{-x}{1+|-x|}=-\frac{x}{1+|x|}=-f(x)$$

والدالة f فردية على **D** .

$$f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}\ ...(4)$$

مجموعة التعريف هي : $\mathbf{D}=\left]-\infty,0\right[\cup\left]0,+\infty\right[$

إن **D** متناظرة بالنسبة إلى 0 ، ومن أجل كل عدد x من **D** لدينا :

$$f(-x)=(-x)^2+\frac{1}{(-x)^2}=x^2+\frac{1}{x^2}=f(x)$$

والدالة f زوجية على **D** .

$$f(x)=x+\frac{1}{x}\ ...(5)$$

مجموعة التعريف هي : $\mathbf{D}=\left]-\infty,0\right[\cup\left]0,+\infty\right[$

إن **D** متناظرة بالنسبة إلى 0 ، ومن أجل كل عدد x من **D** لدينا :

$$f(-x)=-x+\frac{1}{-x}=-x-\frac{1}{x}=-\left(x+\frac{1}{x}\right)=-f(x)$$

والدالة f فردية على **D** .

$$f(x)=\frac{|x|}{x^2-1}\ ...(6)$$

مجموعة التعريف هي : $\mathbf{D}=\left]-\infty,-1\right[\cup\left]-1,+1\right[\cup\left]+1,+\infty\right[$

إن **D** متناظرة بالنسبة إلى 0 ، ومن أجل كل عدد x من **D** لدينا :

$$f(-x)=\frac{|-x|}{(-x)^2-1}=\frac{|x|}{x^2-1}=f(x)$$

والدالة f زوجية على **D** .

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-4}\ ...(7)$$

مجموعة التعريف هي : $\mathbf{D}=\left]-\infty,-2\right[\cup\left]-2,+2\right[\cup\left]+2,+\infty\right[$

إن **D** متناظرة بالنسبة إلى 0 ، ومن أجل كل عدد x من **D** لدينا :

$$f(-x)=\frac{(-x)^2+1}{(-x)^2-4}=\frac{x^2+1}{x^2-4}=f(x)$$

والدالة f زوجية على **D** .

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{4-x^2}}\ ...(8)$$

تكون الدالة f معرفة عندما يكون $x^2-16\geq 0$ و $4-x^2>0$ وهذا لا يتحقق لأن تقاطع

مجالي حلول المتراجحتين مجموعة خالية ، وبالتالي : $\mathbf{D}=\phi$ ولا يمكن المتابعة .

$$f(x)=\sqrt{\frac{x^2-16}{4-x^2}}\ ...(9)$$

تكون الدالة f معرفة عندما يكون $(x^2-16)(4-x^2)\geq 0$ و $4-x^2\neq 0$

وباستعمال الطريقة السابقة نجد أن مجموعة التعريف هي : $\mathbf{D}=\left[-4,-2\right[\cup\left]2,+4\right]$

إن **D** متناظرة بالنسبة إلى 0 ، ومن أجل كل عدد x من **D** لدينا :

$$f(-x)=\sqrt{\frac{(-x)^2-16}{4-(-x)^2}}=f(x)$$

والدالة f زوجية على **D** .

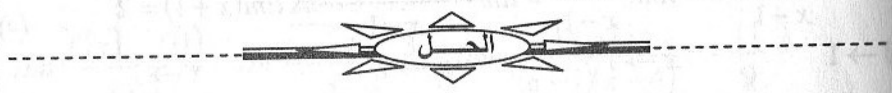


من أجل كل دالة f

- عين مجموعة تعريفها (اكتبها على شكل مجال).
- احسب نهايتها عندما يؤول x إلى كل طرف من طرفي(أو أطراف) مجال التعريف.
- احسب نهايتها عندما يؤول x إلى $(+1)$.
- احسب نهاية $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ عندما يؤول x إلى $(+1)$.

$f(x)=4-4x\ ...(1)$ $\quad f(x)=x^2+3x-7\ ...(2)$ $\quad f(x)=x^2\ ...(3)$

$f(x)=\sqrt{x}\ ...(4)$ $\quad f(x)=\frac{2x+3}{x-4}\ ...(5)$ $\quad f(x)=\frac{1}{x}\ ...(6)$



$$f(x)=4-4x\ ...(1)$$

أ) الدالة f معرفة على $\left]-\infty,+\infty\right[$

ب) $$\lim_{x\to-\infty} f(x)=4-4(-\infty)=4+(+\infty)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=4-4(+\infty)=4+(-\infty)=-\infty$$

ج) $$\lim_{x\to1} f(x)=0$$

د) $$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{4-4x}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{-4(x-1)}{x-1}=-4$$

$f(x)=x^2+3x-7\ldots(2)$

(أ) الدالة f معرفة على $]-\infty,+\infty[$

(ب)
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^2=(-\infty)^2=+\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^2=(+\infty)^2=+\infty$$

(جـ)
$$\lim_{x\to1} f(x)=-3$$

(د)
$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+3x-4}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+4)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+4)=5$$

$f(x)=x^2\ldots(3)$

(أ) الدالة f معرفة على $]-\infty,+\infty[$

(ب)
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^2=(-\infty)^2=+\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^2=(+\infty)^2=+\infty$$

(جـ)
$$\lim_{x\to1} f(x)=+1$$

(د)
$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+1)=2$$

$f(x)=\sqrt{x}\ldots(4)$

(أ) الدالة f معرفة على $[0,+\infty[$

(ب)
$$\lim_{x\to0} f(x)=\sqrt{0}=0$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\sqrt{+\infty}=+\infty$$

(جـ)
$$\lim_{x\to1} f(x)=+1$$

(د)
$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$$

$f(x)=\frac{2x+3}{x-4}\ldots(5)$

(أ) الدالة f معرفة على $]-\infty,4[\cup]4,+\infty[$

(ب)
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x}=2 \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x}=2$$
$$\lim_{x\xrightarrow{>}+4} f(x)=\frac{11}{0^+}=+\infty \qquad \lim_{x\xrightarrow{<}+4} f(x)=\frac{11}{0^-}=-\infty$$

(جـ)
$$\lim_{x\to1} f(x)=-\frac{5}{3}$$

(د)
$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{2x+3}{x-4}+\frac{5}{3}}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{11x-11}{3(x-1)(x-4)}=-\frac{11}{9}$$

$f(x)=\frac{1}{x}\ldots(6)$

(أ) الدالة f معرفة على $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

(ب)
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{1}{+\infty}=0 \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\frac{1}{-\infty}=0$$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$

(جـ) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +1$

(د) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{1 - x}{x(x-1)} = \lim\limits_{x \to 1} -\frac{1}{x} = -1$



من أجل كل دالة f ، عين مجموعة تعريفها ، احسب النهايات المطلوبة .

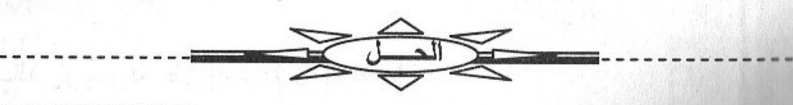
$f(x) = \frac{4 - x^2}{x - 2}$ ، $\lim\limits_{x \to +2} f\,?$ ...(2) $\qquad$ $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1 - x}$ ، $\lim\limits_{x \to +4} f\,?$ ...(1)

$f(x) = \frac{3 - \sqrt{x}}{9 - x}$ ، $\lim\limits_{x \to +9} f\,?$ ...(4) $\qquad$ $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{1 - x}$ ، $\lim\limits_{x \to +1} f\,?$ ...(3)

$f(x) = \frac{x^2 + x}{|x^2 - 1| + 1}$ ، $\lim\limits_{x \to -1} f\,?$ ، $\lim\limits_{x \to 0} f\,?$ ، $\lim\limits_{x \to +1} f\,?$ ...(5)

$f(x) = \frac{x + 2}{x^2 + x} + \frac{3x + 1}{x^2 - 1}$ ، $\lim\limits_{x \to -1} f\,?$ ...(6)

$f(x) = \sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ ، $\lim\limits_{x \to +1} f\,?$ ...(7)



$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1 - x}$ ...(1)

الدالة f معرفة على $[0,1[\cup]1,+\infty[$.

$\lim\limits_{x \to +4} f(x) = -\frac{2}{3}$

$f(x) = \frac{4 - x^2}{x - 2}$ ...(2)

الدالة f معرفة على $]-\infty,+2[\cup]+2,+\infty[$. $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \frac{0}{0}?$ لنسلك طريقا أخرى

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \frac{(2 - x)(2 + x)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} (-2 - x) = -4$

$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{1 - x}$ ...(3)

الدالة f معرفة على $]-\infty,+1[\cup]+1,+\infty[$. $\lim\limits_{x \to +1} f(x) = \frac{0}{0}?$ لنسلك طريقا أخرى

$\lim\limits_{x \to +1} f(x) = \lim\limits_{x \to +1} \frac{(x - 1)(x - 2)}{1 - x} = \lim\limits_{x \to +1} (2 - x) = +1$

$f(x) = \frac{3 - \sqrt{x}}{9 - x}$ ...(4)

الدالة f معرفة على $[0,9[\cup]9,+\infty[$. $\lim\limits_{x \to +9} f(x) = \frac{0}{0}?$ لنسلك طريقا أخرى

$\lim\limits_{x \to +9} f(x) = \lim\limits_{x \to +9} \frac{3 - \sqrt{x}}{(3 - \sqrt{x})(3 + \sqrt{x})} = \lim\limits_{x \to +9} \frac{1}{3 + \sqrt{x}} = \frac{1}{6}$

$f(x) = \frac{x^2 + x}{|x^2 - 1| + 1}$ ...(5)

الدالة f معرفة على $]-\infty,+\infty[$

$\lim\limits_{x \to +1} f(x) = +2$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 0$

$f(x) = \frac{x + 2}{x^2 + x} + \frac{3x + 1}{x^2 - 1}$ ...(6)

الدالة f معرفة على $]-\infty,-1[\cup]-1,0[\cup]0,+1[\cup]+1,+\infty[$

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} \frac{(x - 1)(x + 2) + x(3x + 1)}{x(x + 1)(x - 1)} = \lim\limits_{x \to -1} \frac{4x^2 + 2x - 2}{x(x + 1)(x - 1)} = \frac{0}{0}?$

$= \lim\limits_{x \to -1} \frac{4x^2 + 2x - 2}{x(x + 1)(x - 1)} = \lim\limits_{x \to -1} \frac{2(x + 1)(2x - 1)}{x(x + 1)(x - 1)} = \lim\limits_{x \to -1} \frac{2(2x - 1)}{x(x - 1)} = -3$

$f(x)=\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2-3x+2}$ ...(7)

الدالة f معرفة على $]-\infty,0]\cup\{+1\}\cup[+2,+\infty[$

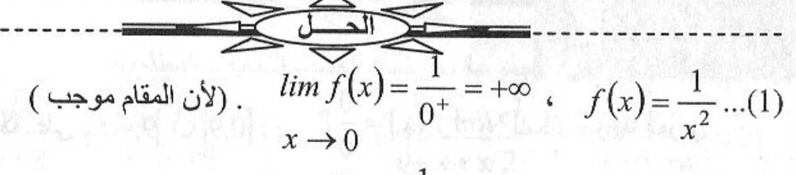
$\lim_{x\to+1} f(x)=0$

التمرين5

تحقق في كل حالة أن الدالة f تؤول إلى المالانهاية (حدد : $-\infty$ أو $+\infty$).

$f(x)=\frac{1}{x^2}$ و x يؤول إلى 0 ......(1) $f(x)=\frac{x-2}{|x-1|}$ و x يؤول إلى (+1) ....(2)

$f(x)=\frac{2x^2-3x-2}{2x^2+3x+1}$ و x يؤول إلى (-1).......(3)



الحل

$f(x)=\frac{1}{x^2}$ ...(1) ، $\lim_{x\to0} f(x)=\frac{1}{0^+}=+\infty$. (لأن المقام موجب)

$f(x)=\frac{x-2}{|x-1|}$ ...(2) ، $\lim_{x\to+1} f(x)=\frac{-1}{0^+}=-\infty$ (لأن المقام موجب)

$f(x)=\frac{2x^2-3x-2}{2x^2+3x+1}$ ...(3) ، $\lim_{x\underset{<}{\to}-1} f(x)=\frac{2x^2-3x-2}{(x+1)(2x+1)}=\frac{3}{(0^-)(-1)}=+\infty$

$\lim_{x\underset{>}{\to}-1} f(x)=\frac{2x^2-3x-2}{(x+1)(2x+1)}=\frac{3}{(0^+)(-1)}=-\infty$ (لأن إشارة المقام متغيرة)

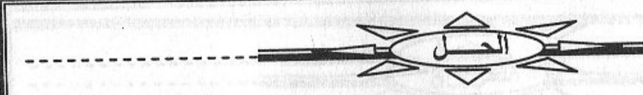


التمرين6

احسب نهايات الدالة f و تحقق من النهايات المعطاة .

$f(x)=\frac{-3x+2}{x+2}$ ، $\lim_{x\to+\infty} f=-3$ ، $\lim_{x\to-\infty} f=?$ ....(1)

$f(x)=\frac{3x-|x-4|}{x+5}$ ، $\lim_{x\to-\infty} f=+4$ ، $\lim_{x\to+\infty} f=?$ ....(2)



الحل

$f(x)=\frac{-3x+2}{x+2}$ ، $\lim_{x\to+\infty} f=-3$ ، $\lim_{x\to-\infty} f=?$ ....(1)

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x}{x}=-3$ ، $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x}{x}=-3$

$f(x)=\frac{3x-|x-4|}{x+5}$ ، $\lim_{x\to-\infty} f=+4$ ، $\lim_{x\to+\infty} f=?$ ....(2)

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-(-x+4)}{x+5}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x-4}{x+5}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x}{x}=4$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-(x-4)}{x+5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+4}{x+5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x}=+2$



التمرين7

عين نهايات الدالة f المعرفة على I في الحالات الآتية :

1) $f(x)=\frac{1}{x^3}$, $I=]0,+\infty[$ في $+\infty$ و في 0

2) $f(x)=-\frac{2}{3x^2}$, $I=]-\infty,0[$ في $-\infty$ و في 0

3) $f(x)=-\frac{3}{x}$, $I=]-\infty,0[$ في $-\infty$ و في 0

4) $f(x)=\frac{2x}{x+2}$, $I=]-2,+\infty[$ في -2 و في $+\infty$

5) $f(x)=\frac{x^2-2x+4}{x+1}$, $I=]-\infty,-1[$ في $-\infty$

6) $f(x)=\frac{5x^2+2x-3}{3x^2-8x+4}$, $I=]2,+\infty[$ في $+\infty$

7) $f(x)=\frac{1-2x}{(x+1)^2}$, $I=]-1,+\infty[$ في $+\infty$



الحل

1) $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$

$\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} f(x)=\dfrac{+1}{0^+}=+\infty$, $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 0} f(x)=\dfrac{+1}{0^-}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{+1}{+\infty}=0$

2) $f(x)=-\dfrac{2}{3x^2}$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\dfrac{-2}{0^+}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{-2}{3(-\infty)^2}=\dfrac{-2}{+\infty}=0$

3) $f(x)=-\dfrac{3}{x}$

$\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} f(x)=\dfrac{-3}{0^+}=-\infty$, $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 0} f(x)=\dfrac{-3}{0^-}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\dfrac{-3}{-\infty}=0$

4) $f(x)=\dfrac{2x}{x+2}$

$\lim\limits_{x \underset{>}{\to} -2} f(x)=\dfrac{-4}{0^+}=-\infty$, $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} -2} f(x)=\dfrac{-4}{0^-}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x}=2$

5) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+4}{x+1}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$

6) $f(x)=\dfrac{5x^2+2x-3}{3x^2-8x+4}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^2}{3x^2}=\dfrac{5}{3}$

7) $f(x)=\dfrac{1-2x}{(x+1)^2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2}{x}=0$

التمرين 8

عين نهايات الدالة f عند أطراف المجال I في الحالات الآتية :

1) $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$, $I=]3,+\infty[$

2) $f(x)=-\dfrac{1}{-2x+3}$, $I=\left]-\infty,\dfrac{3}{2}\right[$

3) $f(x)=\dfrac{3}{4-2x}$, $I=]3,+\infty[$

4) $f(x)=\dfrac{1+x}{2x-1}$, $I=\left]-\infty,\dfrac{1}{2}\right[$

5) $f(x)=\dfrac{3x+1}{3x^2+x-3}$, $I=]1,+\infty[$

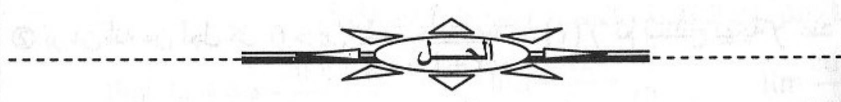
6) $f(x)=\dfrac{x^2+2x+2}{x^2+x-2}$, $I=]-2,1[$

التمرين 9

عين النهايات الآتية :

1) $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 1}\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$, 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{2x}{x+3}}$, 3) $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0}\sqrt{x+\dfrac{1}{x}}$, 4) $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 3}\dfrac{\sqrt{x+1}}{(x-3)^2}$

5) $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} -2}\dfrac{-4}{\sqrt{x+2}}$, 6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-4+\dfrac{1}{x}\right)^3$



الحل

1) $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 1}\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$

$\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 1}\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}=\dfrac{1}{\sqrt{0^+}}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{2x}{x+3}}$

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x+3}=2$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{2x}{x+3}}=\sqrt{2}$

3) $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0}\sqrt{x+\dfrac{1}{x}}$

بما أن $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=0+(+\infty)=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0}\sqrt{x+\dfrac{1}{x}}=+\infty$

4) $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 3} \frac{\sqrt{x+1}}{(x-3)^2}$

$$\lim_{x \underset{>}{\to} 3} \frac{\sqrt{x+1}}{(x-3)^2} = \frac{\sqrt{4}}{\left(0^+\right)^2} = \frac{\sqrt{4}}{0^+} = +\infty$$

5) $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} -2} \frac{-4}{\sqrt{x+2}}$

$$\lim_{x \underset{>}{\to} -2} \frac{-4}{\sqrt{x+2}} = \frac{-4}{0^+} = -\infty$$

6) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - 4 + \frac{1}{x}\right)^3$

بما أن $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - 4 + \frac{1}{x}\right) = +\infty - 4 + \frac{1}{+\infty} = +\infty$ فإن

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x - 4 + \frac{1}{x}\right)^3 = (+\infty)^3 = +\infty$$



لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ كما يلي : $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

① ادرس نهاية f عند 0 .

② برهن أنه من أجل كل $x > 0$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$ ثم استنتج نهاية f عند $+\infty$.

الحل

① $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) = 1$

② من أجل $x > 0$ لدينا

$$f(x) = \frac{\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

بضرب العبارة في مرافقها وقسمتها عليه

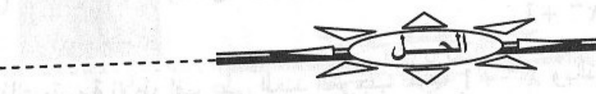
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{0}{+\infty} = 0$$

التمرين11

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]3,+\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3}$

① برهن أنه من أجل كل $x > 3$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} + 2}$.

② استنتج نهايات f عند 3 و عند $+\infty$.



① من أجل $x > 0$ لدينا

$$f(x) = \frac{\left(\sqrt{x+1} - 2\right)\left(\sqrt{x+1} + 2\right)}{(x-3)\left(\sqrt{x+1} + 2\right)} = \frac{x+1-4}{(x-3)\left(\sqrt{x+1} + 2\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x+1} + 2}$$

بضرب البسط والمقام في مرافق المقام

② استنتاج نهايات f عند 3 و عند $+\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 2} = \frac{1}{+\infty} = 0 \quad , \quad \lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 2} = \frac{1}{4}$$



باستعمال نظريات المقارنة (الحصر) عين النهايات الآتية :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{x-1}$, 2) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sin 2x}{x^2 + 1}$, 3) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(3x + 4 + \frac{\sin x}{x}\right)$

4) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^2 + \cos x\right)$



1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{x-1}$

بما أن $-1 \leq \cos x \leq +1$ فإن $\frac{-1}{x+1} \leq \frac{\cos x}{x+1} \leq \frac{+1}{x+1}$

وهذا بقسمة الأطراف على العدد الموجب تماما $x+1$ على اعتبار أن $x > 0$

4) $\lim_{x \to 3^{+}} \frac{\sqrt{x+1}}{(x-3)^2}$

$$\lim_{x \to 3^{+}} \frac{\sqrt{x+1}}{(x-3)^2} = \frac{\sqrt{4}}{\left(0^+\right)^2} = \frac{\sqrt{4}}{0^+} = +\infty$$

5) $\lim_{x \to -2^{+}} \frac{-4}{\sqrt{x+2}}$

$$\lim_{x \to -2^{+}} \frac{-4}{\sqrt{x+2}} = \frac{-4}{0^+} = -\infty$$

6) $\lim_{x \to +\infty} \left(x-4+\frac{1}{x}\right)^3$

بما أن $\lim_{x \to +\infty} \left(x-4+\frac{1}{x}\right) = +\infty - 4 + \frac{1}{+\infty} = +\infty$ فإن

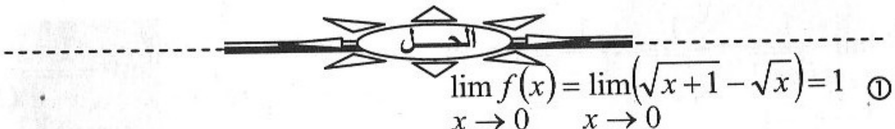
$$\lim_{x \to +\infty} \left(x-4+\frac{1}{x}\right)^3 = (+\infty)^3 = +\infty$$



لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

① ادرس نهاية f عند 0 .

② برهن أنه من أجل كل $x>0$ ، $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$ ثم استنتج نهاية f عند $+\infty$.



① $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right) = 1$

② من أجل $x>0$ لدينا

$$f(x)=\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

بضرب العبارة في مرافقها وقسمتها عليه

استنتاج نهاية f عند $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{0}{+\infty} = 0$$

التمرين11

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]3,+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

① برهن أنه من أجل كل $x>3$ ، $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}$.

② استنتج نهايات f عند 3 و عند $+\infty$.

الحل

① من أجل $x>0$ لدينا

$$f(x)=\frac{\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\frac{x+1-4}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}$$

بضرب البسط والمقام في مرافق المقام

② استنتاج نهايات f عند 3 و عند $+\infty$.

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} = \frac{1}{4} \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} = \frac{1}{+\infty} = 0$$



باستعمال نظريات المقارنة (الحصر) عين النهايات الآتية :

1) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{x-1}$ ، 2) $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sin 2x}{x^2+1}$ ، 3) $\lim_{x \to -\infty} \left(3x+4+\frac{\sin x}{x}\right)$

4) $\lim_{x \to -\infty} \left(x^2+\cos x\right)$

الحل

1) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{x-1}$: بما أن $-1 \le \cos x \le +1$ فإن $\frac{-1}{x+1} \le \frac{\cos x}{x+1} \le \frac{+1}{x+1}$

وهذا بقسمة الأطراف على العدد الموجب تماما $x+1$ على اعتبار أن $x>0$

: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{x+1}\le\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x+1}\le\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{+1}{x+1}$ ومنه $0\le\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x+1}\le 0$

والخلاصة $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x+1}=0$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sin 2x}{x^2+1}$ بما أن $-1\le\sin 2x\le+1$ فإن $\frac{-1}{x^2+1}\le\frac{\sin 2x}{x^2+1}\le\frac{+1}{x^2+1}$

وذلك بقسمة الأطراف على العدد الموجب تماما x^2+1 وبالتالي :

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-1}{x^2+1}\le\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sin 2x}{x^2+1}\le\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{+1}{x^2+1}$ ومنه $0\le\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sin 2x}{x^2+1}\le 0$

والخلاصة $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sin 2x}{x^2+1}=0$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x+4+\frac{\sin x}{x}\right)$ بما أن $-1\le\sin x\le+1$ فإن $\frac{+1}{x}\le\frac{\sin x}{x}\le\frac{-1}{x}$

وهذا بقسمة الأطراف على العدد السالب تماما x وبإضافة $3x+4$ إلى الأطراف نجد :

$3x+4+\frac{+1}{x}\le 3x+4+\frac{\sin x}{x}\le 3x+4+\frac{-1}{x}$ وبالتالي :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(3x+4+\frac{+1}{x}\right)\le\lim_{x\to-\infty}\left(3x+4+\frac{\sin x}{x}\right)\le\lim_{x\to-\infty}\left(3x+4+\frac{-1}{x}\right)$$

وبما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x+4+\frac{-1}{x}\right)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x+4+\frac{+1}{x}\right)=-\infty$

فإن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x+4+\frac{\sin x}{x}\right)=-\infty$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+\cos x\right)$ بإضافة x^2 إلى $-1\le\cos x\le+1$ نجد :

$x^2-1\le x^2+\cos x\le x^2+1$ وبالتالي :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x^2-1\right)\le\lim_{x\to-\infty}\left(x^2+\cos x\right)\le\lim_{x\to-\infty}\left(x^2+1\right)$$

وبما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+1\right)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-1\right)=+\infty$

فإن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+\cos x\right)=+\infty$

التمرين13

برهن أن المنحني – الممثل للدالة f المعرفة على المجال I – يقبل مستقيما مقاربا أفقيا أو عموديا في الحالات الآتية :

1) $I=]2,+\infty[\ ,\ f(x)=\frac{1}{x-2}$ 2) $I=]-\infty,0[\ ,\ f(x)=2-\frac{1}{x^2}$

3) $I=]1,+\infty[\ ,\ f(x)=\frac{2x}{1-x}$ 4) $I=\mathbf{R}\ ,\ f(x)=\frac{-x+1}{x^2+1}$

5) $I=]-\infty,-2[\ ,\ f(x)=\frac{x^2+4}{x^2+x-2}$ 6) $I=\mathbf{R}\ ,\ f(x)=\frac{2x+1}{x^2+x+1}$

الحل

1) بما أن : $\lim\limits_{x\underset{>}{\to}2}f(x)=\lim\limits_{x\underset{>}{\to}2}\frac{1}{x-2}=\frac{1}{0^+}=+\infty$

فإن المنحني الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا **عموديا** معادلته $x=2$

وبما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x-2}=\frac{1}{+\infty}=0$ فإن :

المنحني الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا **أفقيا** معادلته $y=0$ (حامل محور الفواصل)

2) بما أن : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-\frac{1}{x^2}\right)=2-\frac{1}{+\infty}=2$

فإن المنحني الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا **أفقيا** معادلته $y=2$

وبما أن : $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} f(x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0}\left(2-\frac{1}{x^2}\right)=2-\frac{1}{0^+}=2-(+\infty)=-\infty$

فإن المنحني الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا **عموديا** معادلته $x=0$.

3) بما أن $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1}\frac{2x}{1-x}=\frac{2}{0^-}=-\infty$

فإن المنحني الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا **عموديا** معادلته $x=1$

وبما أن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x \to +\infty}\frac{2x}{1-x}=\lim\limits_{x \to +\infty}\frac{2x}{-x}=-2$

فإن المنحني الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا **أفقيا** معادلته $y=-2$.

4) بما أن $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x \to -\infty}\frac{-x+1}{x^2+1}=\lim\limits_{x \to -\infty}\frac{-x}{x^2}=\lim\limits_{x \to -\infty}\frac{-1}{x}=\frac{-1}{-\infty}=0$

فإن المنحني الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا **أفقيا** معادلته $y=0$ (حامل محور الفواصل)

وبما أن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x \to +\infty}\frac{-x+1}{x^2+1}=\lim\limits_{x \to +\infty}\frac{-x}{x^2}=\lim\limits_{x \to +\infty}\frac{-1}{x}=\frac{-1}{+\infty}=0$

فإن المنحني الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا **أفقيا** معادلته $y=0$ (حامل محور الفواصل)

ملاحظة : ويمكن جمع الدراستين في دراسة واحدة كما في (6) :

5) بما أن $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x \to -\infty}\frac{x^2+4}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x \to -\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$

فإن المنحني الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا **أفقيا** معادلته $y=1$, وبما أن

$$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -2} f(x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -2}\frac{x^2+4}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -2}\frac{x^2+4}{(x+2)(x-1)}=\frac{8}{(0^-)(-3)}=\frac{8}{0^+}=+\infty$$

فإن المنحني الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا **عموديا** معادلته $x=-2$.

6) بما أن $\lim\limits_{x \to \mp\infty} f(x)=\lim\limits_{x \to \mp\infty}\frac{2x+1}{x^2+x+1}=\lim\limits_{x \to \mp\infty}\frac{2x}{x^2}=\lim\limits_{x \to \mp\infty}\frac{2}{x}=0$

فإن المنحني الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا **أفقيا** معادلته $y=0$ (حامل محور الفواصل)

التمرين 14

برهن أن المستقيم D مقارب للمنحني C_f ثم ادرس الوضعية النسبية لـ C_f و D على المجال I في الحالات الآتية :

1) $D: y=x \quad , \quad I=]0,+\infty[\; , \; f(x)=\frac{x^2-1}{x}$

2) $D: y=x-1 \quad , \quad I=]-\infty,-1[\; , \; f(x)=\frac{x^2}{x+1}$

3) $D: y=x+4 \quad , \quad I=]2,+\infty[\; , \; f(x)=\frac{x^2+2x+3}{x-2}$

4) $D: y=-3x+7 \quad , \quad I=]-\infty,-1[\; , \; f(x)=\frac{-3x^2+4x-5}{x+1}$

5) $D: y=x+2 \quad , \quad I=]0,+\infty[\; , \; f(x)=\frac{x^3+2x^2-1}{x^2}$

الحل

1) بما أن $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\frac{x^2-1}{x}-x\right)=\lim\limits_{x \to +\infty}\frac{-1}{x}=0$ فإن D مستقيم مقارب للمنحني C_f

وإذا كان $x>0$ فإن $\frac{-1}{x}<0$ وهذا يعني أن C_f **تحت** D .

2) بما أن $\lim\limits_{x \to -\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-(x-1)\right)=\lim\limits_{x \to -\infty}\frac{1}{x+1}=0$ فإن D مستقيم مقارب للمنحني C_f

وإذا كان $x<-1$ فإن $\frac{1}{x+1}<0$ وهذا يعني أن C_f **تحت** D .

3) بما أن $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\frac{x^2+2x+3}{x-2}-(x+4)\right)=\lim\limits_{x \to +\infty}\frac{11}{x-2}=0$

فإن D مستقيم مقارب للمنحني C_f

وإذا كان $x > 2$ فإن $\frac{11}{x-2} > 0$ وهذا يعني أن C_f **فوق** D .

4) بما أن $\lim\limits_{x \to -\infty}\left(\frac{-3x^2+4x-5}{x+1}-(-3x+7)\right) = \lim\limits_{x \to -\infty}\frac{-12}{x+1} = 0$

فإن D مستقيم مقارب للمنحني C_f

وإذا كان $x < -1$ فإن $\frac{-12}{x+1} > 0$ وهذا يعني أن C_f **فوق** D .

5) بما أن $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\frac{x^3+2x^2-1}{x^2}-(x+2)\right) = \lim\limits_{x \to +\infty}\frac{-1}{x^2} = 0$

فإن D مستقيم مقارب للمنحني C_f

وإذا كان $x > 0$ فإن $\frac{-1}{x^2} < 0$ وهذا يعني أن C_f **تحت** D .



التمرين 15

لتكن f الدالة المعرفة على $I =]1,+\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{x^2+3x+1}{x-1}$

① برهن أنه من أجل كل x من I ، $f(x) = x+4+\frac{5}{x-1}$.

② برهن أن المستقيم D ذا المعادلة $y = x+4$ مستقيم مقارب للمنحني C_f .

③ ادرس الوضعية النسبية لـ C_f و D على I.

④ هل يقبل C_f مقاربا آخر؟ إذا كان الجواب : نعم , عين معادلته.

الحل

① لدينا : $x+4+\frac{5}{x-1} = \frac{(x+4)(x-1)+5}{x-1} = \frac{x^2+3x+1}{x-1}$

ومنه : $f(x) = x+4+\frac{5}{x-1}$

② بما أن : $\lim\limits_{x \to +\infty}\left[f(x)-(x+4)\right] = \lim\limits_{x \to +\infty}\frac{5}{x-1} = 0$

فإن المستقيم الذي معادلته : $y = x+4$ مقارب مائل للمنحني C_f .

③ ليكن الفرق : $f(x)-(x+4) = \frac{5}{x-1}$

من أجل x من I : $\frac{5}{x-1} > 0$ وبالتالي يقع C_f **فوق** D

④ وبما أن $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = \frac{5}{0^+} = +\infty$

فإن : المستقيم الذي معادلته : $x = 1$ مقارب عمودي للمنحني C_f .

التمرين 16

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = \frac{x^3+2x^2+9x+2}{x^2+1}$

① برهن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x) = x+2+\frac{8x}{x^2+1}$.

② برهن أن المنحني C_f يقبل مستقيما مقاربا مائلا يطلب معادلة له .

③ ادرس الوضعية النسبية لـ C_f و D على $\mathbb{R}$.

الحل

① لدينا : $x+2+\frac{8x}{x^2+1} = \frac{(x+2)(x^2+1)+8x}{x^2+1} = \frac{x^3+2x^2+9x+2}{x^2+1}$

ومنه : $f(x) = x+2+\frac{8x}{x^2+1}$

② بما أن : $\lim\limits_{x \to \mp\infty}\left[f(x)-(x+2)\right] = \lim\limits_{x \to \mp\infty}\frac{8x}{x^2+1} = 0$

فإن المستقيم الذي معادلته : $y = x+2$ مقارب مائل للمنحني C_f .

③ ليكن الفرق : $f(x)-(x+2) = \frac{8x}{x^2+1}$

إن إشارة هذا الفرق من إشارة $8x$, وملخص إشارة هذا الفرق في الجدول الآتي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$8x$	$-$	0	$+$
الوضعية	المنحني C_f تحت المقارب المائل		المنحني C_f فوق المقارب المائل

التمرين17

لتكن f الدالة المعرفة كما يلي : $f(x)=a+\frac{1}{(x-b)^2}$

عين العددين الحقيقيين a و b حتى يتحقق الآتي : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-5$ و $\lim_{x\to3} f(x)=+\infty$

الحـــل

بما أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(x-b)^2}=0$ فإن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=a$, وبالتالي : $a=-5$

وإذا كانت $\lim_{x\to3} f(x)=+\infty$ فإن $\lim_{x\to3}\frac{1}{(x-b)^2}=+\infty$ (لأن a ثابت)

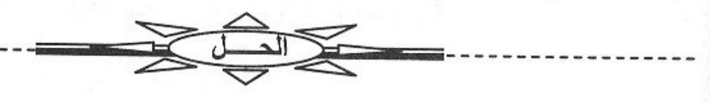
وحتى يتحقق هذا يجب تأخذ b القيمة 3 .وبالتالي : $b=3$

التمرين18

لتكن f الدالة المعرفة كما يلي : $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-d}$

عين الأعداد الحقيقية a , b , c , d إذا علمت أن :

- المستقيم D ذو المعادلة $y=2x+1$ مقارب مائل للمنحني في $+\infty$.
- المستقيم ذو المعادلة $x=1$ مقارب عمودي للمنحني .
- يشمل المنحني النقطة التي فاصلتها 0 وترتيبها 2 .



- بما أن $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{c}{x-d}=0$

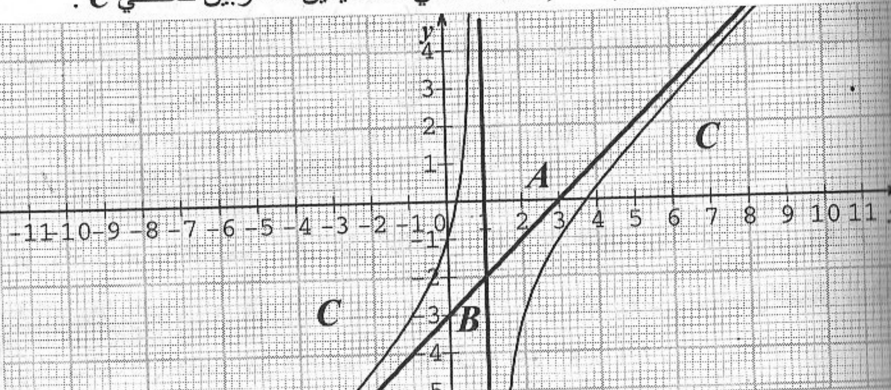
فإن المستقيم ذا المعادلة $y=ax+b$ مقارب مائل للمنحني في $+\infty$

وبالتالي : $a=2$ و $b=1$, ويكون لدينا $f(x)=2x+1+\frac{c}{x-d}$

- وبما أن $\lim_{x\to d}|f(x)|=+\infty$ فإن المستقيم ذا المعادلة $x=d$ مقارب عمودي للمنحني وبالتالي $d=1$, ويكون لدينا $f(x)=2x+1+\frac{c}{x-1}$
- بما أن المنحني يشمل النقطة التي فاصلتها 0 وترتيبها 2 , فإن $f(0)=2$ أي أن $2=2(0)+1+\frac{c}{0-1}$ وبالتالي $c=-1$ ويكون لدينا $f(x)=2x+1-\frac{1}{x-1}$

التمرين19

انطلاقا من المنحني المرسوم أدناه , عين معادلتي المستقيمين المقاربين للمنحني **C** .



الحـــل

- معادلة المستقيم المقارب العمودي هي : $x=1$.
- نلاحظ من الشكل أن المستقيم المقارب المائل يشمل النقطتين : $A(3,0)$ و $B(0,-3)$

و بما أن معادلة هذا المستقيم من الشكل $y=ax+b$ فإن $\begin{cases}0=a(3)+b\\-3=a(0)+b\end{cases}$

وبالتالي $a=1$ و $b=-3$ وتكون معادلة المستقيم المقارب المائل هي: $y=x-3$

الاشتقاقية :

العدد المشتق : العدد المشتق للدالة f عند قيمة x_0 هو النهاية **المنتهية** للدالة

$h \to \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ عندما يؤول h إلى 0 ،

يمكن أن نوجز هذا فيما يلي : $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}$

ونقول – عندئذ – : إن f قابلة للاشتقاق عند x_0 . ونرمز إلى العدد المشتق بالرمز $f'(x_0)$

فمثلا : الدالة f المعرفة على $\mathbf{D} =]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\frac{x-2}{x+1}$

لندرس قابلية اشتقاق الدالة f عند 0.

لنحسب :

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{\frac{h-2}{h+1}-(-2)}{h} = \frac{3h}{h(h+1)} = \frac{3}{h+1}$$

ومنه: $\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3}{h+1} = 3$ ، إذن الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0

و$(+3)$ هو العدد المشتق للدالة f عند 0 وبالتالي : $f'(0)=3$

رمز آخر[1] للعدد المشتق عند x_0

وهو حاصل قسمة التفاضل df على التفاضل dx عند القيمة x_0 : $f'(x_0)=\frac{df}{dx}$

تفسير هندسي للعدد المشتق : إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند x_0 فإن المنحني الممثل للدالة f يقبل مماسا في النقطة التي فاصلتها x_0 معامل توجيهه $f'(x_0)$.

نتيجة : معادلة هذا المماس هي: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

فمثلا: **بما أن** الدالة f المعرفة على $\mathbf{D} =]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\frac{x-2}{x+1}$

قابلة للاشتقاق عند 0 و $f'(0)=3$ **فإن** المنحني الممثل للدالة f يقبل مماسا في النقطة $(0;-2)$ معامل توجيهه $(+3)$.

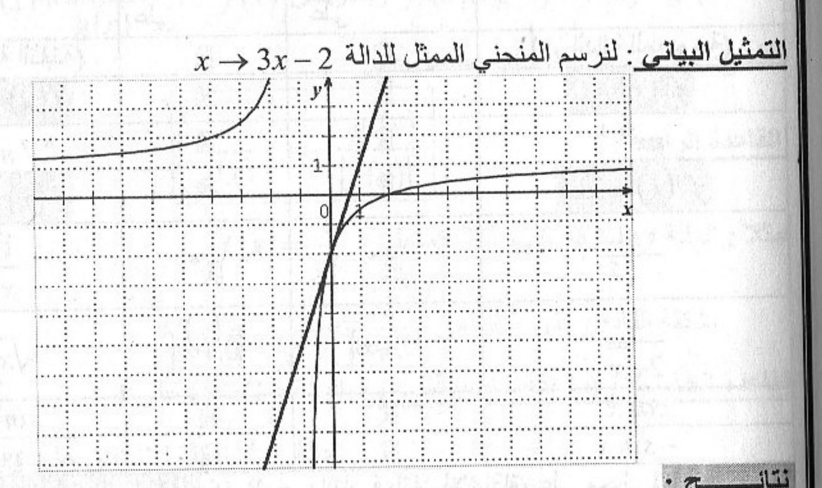
ومعدلة هذا المماس هي : $y=f'(0)(x-0)+f(0)$

1– إن الرمز $f'(x_0)$ للرياضي والفيزيائي والفيلسوف البريطاني Newton (1642–1727)

والرمز $\frac{df}{dx}$ للعالم والفيلسوف الألماني Leibniz(1646–1716)

لكن $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ يكافئ $y=(3)(x-0)+(-2)$ ومنه $y=3x-2$

التمثيل البياني : لنرسم المنحني الممثل للدالة $x \to 3x-2$



نتائج :

الحالة	المماس	النتيجة
إذا كان المماس ذو معامل التوجيه : $f'(x_0)$	يوازي المستقيم ذا المعادلة $y=ax+b$	فإنه يكون $f'(x_0)=a$
	يوازي محور الفواصل (أفقيا)	فإنه يكون $f'(x_0)=0$
	يعامد المستقيم ذا المعادلة $y=ax+b$	فإنه يكون $f'(x_0)=-\frac{1}{a}$
	يعامد محور التراتيب (عموديا)	$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\mp\infty$

مشتقة دالة : f دالة قابلة للاشتقاق عند **كل** قيمة من المجال $\mathbf{I}$ حيث $\mathbf{I} \subset \mathbf{D}$

مشتقة الدالة f على $\mathbf{I}$ هي الدالة المعرفة على $\mathbf{I}$ كما يلي : $x \to f'(x)$

حيث $f'(x)$ هو العدد المشتق للدالة f عند x

ولد اسحاق نيوتن Sir Isaac Newton سنة 1642 بإنجلترا . كان فيلسوفا رياضياتيا وفيزيائيا . قدم نيوتن ورقة علمية وصف فيها قوة الجاذبية الكونيةومهد الطريق لعلم الميكانيكا الكلاسيكية عن طريق قوانين الحركة . يشارك نيوتن ليبنيز الحق في تطوير علم الحساب التفاضلي والمتفرع منالرياضيات...

جدول بمشتقات بعض الدوال المألوفة:

عبارة الدالة f هي	الدالة f معرفة على	وتقبل f الاشتقاق على	ومشتقة الدالة f هي
a (الدالة الثابتة)	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0 (الدالة المعدومة)
$f(x)=-5$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=0$
$x^n \,/\, n\in\mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$f(x)=x^3$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=3x^2$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$]0,+\infty[$	$]0,+\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\cos x$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$

عمليات على الدوال المشتقة : f و g دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال $\mathbf{I}$

القاعدة الأولى : (مشتقة مجموع) : الدالة $(f+g)$ قابلة للاشتقاق على $\mathbf{I}$ ولدينا :

من أجل كل عدد x من $\mathbf{I}$: $\boxed{(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)}$

فمثلا : الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x^2+x-3$

مشتقة الدالة f على $\mathbb{R}$ هي : $f'(x)=2x+1+0=2x+1$

القاعدة الثانية : (مشتقة جداء) : الدالة $(f\times g)$ قابلة للاشتقاق على $\mathbf{I}$ ولدينا :

من أجل كل عدد x من $\mathbf{I}$: $\boxed{(f\times g)'(x)=f'(x)\times g(x)+f(x)\times g'(x)}$

فمثلا : الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=(x^2+x-3)(x^2+1)$

مشتقة الدالة f على $\mathbb{R}$ هي : $f'(x)=(2x+1)(x^2+1)+(x^2+x-3)(2x)$

القاعدة الثالثة : الدالة (λf) – حيث λ عدد حقيقي– قابلة للاشتقاق على $\mathbf{I}$ ولدينا :

من أجل كل عدد x من $\mathbf{I}$: $\boxed{(\lambda f)'(x)=\lambda f'(x)}$

فمثلا : الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=-2x^2$

مشتقة الدالة f على $\mathbb{R}$ هي : $f'(x)=(-2)(2x)=-4x$

فمثلا : الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=-2x^2+4x-1$

مشتقة الدالة f على $\mathbb{R}$ هي : $f'(x)=(-2)(2x)+(4)(1)+0=-4x+4$

نتيجة : g دالة قابلة للاشتقاق على مجال $\mathbf{I}$ ، ولا تنعدم عليه.

f دالة بحيث من أجل كل x من $\mathbf{I}$ $f(x)\times g(x)=1$ لاحظ أن $\left(f=\frac{1}{g}\right)$

إن f قابلة للاشتقاق على $\mathbf{I}$ ولدينا من أجل كل x من $\mathbf{D}$:

$f'(x)\times g(x)+f(x)\times g'(x)=0$ وبتعويض $f(x)$: $f'(x)\times g(x)+\frac{g'(x)}{g(x)}=0$

وبقسمة الطرفين على $g(x)$ نحصل على :

القاعدة الرابعة : $\boxed{\left(\frac{1}{g(x)}\right)'=-\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}}$

فمثلا : الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي : $f(x)=\frac{1}{x^2}$

مشتقة الدالة f على $\mathbb{R}^*$ هي : $f'(x)=-\frac{2x}{x^4}=-\frac{2}{x^3}$

القاعدة الخامسة : (مشتقة حاصل قسمة) : الدالة g لا تنعدم على $\mathbf{I}$

الدالة $\left(\frac{f}{g}\right)$ قابلة للاشتقاق على $\mathbf{I}$ ولدينا :

من أجل كل عدد x من $\mathbf{I}$: $\boxed{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)\times g(x)-f(x)\times g'(x)}{(g(x))^2}}$

فمثلا : الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\frac{2x^2-3x+1}{x^2+x+1}$

مشتقة الدالة f على $\mathbb{R}$ هي :

$$f'(x)=\frac{(4x-3)(x^2+x+1)-(2x^2-3x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$$

القاعدة السادسة :(مشتقة دالة مركبة من دالتين)

من أجل كل عدد x من I : $\boxed{(f\circ g)'(x)=f'[g(x)]\times g(x)}$

فمثلا : الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\sin(ax+b)$

نلاحظ أن f مركبة من الدالتين $x\mapsto \sin x$ و $x\mapsto ax+b$

مشتقة الدالة f على $\mathbb{R}$ هي : $f'(x)=\cos(ax+b)\times a=a\cos(ax+b)$

ومثلا : الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\cos(ax+b)$

نلاحظ أن f مركبة من الدالتين $x\mapsto \cos x$ و $x\mapsto ax+b$

مشتقة الدالة f على $\mathbb{R}$ هي : $f'(x)=-\sin(ax+b)\times a=-a\sin(ax+b)$

---- ج) ----

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2}{x_0+h-3}-\left(\frac{2}{x_0-3}\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-2h}{h(x_0+h-3)(x_0-3)}=\lim_{h\to 0}\frac{-2}{(x_0+h-3)(x_0-3)}=\boxed{\frac{-2}{(x_0-3)^2}}$$

(3)... $f(x)=\frac{4x-5}{3x+1}$ من أجل $x_0=-2$ ، $x_0=+1$ ، $x_0\in\mathbf{R}$

---- أ) ----

$$f'(-2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{4h-13}{3h-5}-\left(\frac{13}{5}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-19h}{5h(3h-5)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-19}{5(3h-5)}=\boxed{\frac{19}{25}}$$

---- ب) ----

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{4h-1}{3h+4}-\left(-\frac{1}{4}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{19h}{4h(3h+4)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{19}{4(3h+4)}=\boxed{\frac{19}{16}}$$

---- ج) ----

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{4x_0+4h-5}{3x_0+3h+1}-\left(\frac{4x_0-5}{3x_0+1}\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{19h}{h(3x_0+3h+1)(3x_0+1)}=\lim_{h\to 0}\frac{19}{(3x_0+3h+1)(3x_0+1)}=\frac{19}{(3x_0+1)^2}$$

(4)... $f(x)=-\sqrt{3x+2}$ من أجل $x_0=+4$ ، $x_0=-\frac{1}{2}$ ، $x_0\in\mathbf{R}$

---- أ) ----

$$f'(4)=\lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-\sqrt{3h+14}-\left(-\sqrt{14}\right)}{h}=\frac{0}{0}\ ?$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left(-\sqrt{3h+14}+\sqrt{14}\right)\left(-\sqrt{3h+14}-\sqrt{14}\right)}{h\left(-\sqrt{3h+14}-\sqrt{14}\right)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3h}{h\left(-\sqrt{3h+14}-\sqrt{14}\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{3}{-\sqrt{3h+14}-\sqrt{14}}=-\frac{3}{2\sqrt{14}}$$

---- ب) ----

$$f'\left(-\frac{1}{2}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(-\frac{1}{2}+h\right)-f\left(-\frac{1}{2}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-\sqrt{3h+\frac{1}{2}}-\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}{h}=\frac{0}{0}\ ?$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{-\sqrt{3h+\frac{1}{2}}-\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(-\sqrt{3h+\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\left(-\sqrt{3h+\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}{h\left(-\sqrt{3h+\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3h}{h\left(-\sqrt{3h+\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{3}{-\sqrt{3h+\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}}=-\frac{3}{2\sqrt{\frac{1}{2}}}=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

---- ج) ----

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$f(x)=(2x-3)(-3x^2+4x-7)...(6)$$

$D=I=R$ ومن أجل كل x من I

$$f'(x)=(2)(-3x^2+4x-7)+(2x-3)(-6x+4)=-18x^2+34x-26$$

$$f(x)=(2x^2+3)(-5x^2+6x+1)...(7)$$

$D=I=R$ ومن أجل كل x من I

$$f'(x)=(4x)(-5x^2+6x+1)+(2x^2+3)(-10x+6)=-40x^3+36x^2-26x+18$$

$$f(x)=\left(\frac{1}{2}x^2-4x+1\right)(3x^2+7x)...(8)$$

$D=I=R$ ومن أجل كل x من I

$$f'(x)=(x-4)(3x^2+7x)+\left(\frac{1}{2}x^2-4x+1\right)(6x+7)=6x^3-\frac{51}{2}x-50x+7$$

$$f(x)=(-5x^2+6x+1)^2=(-5x^2+6x+1)(-5x^2+6x+1)...(9)$$

$D=I=R$ ومن أجل كل x من I

$$f'(x)=(-10x+6)(-5x^2+6x+1)+(-5x^2+6x+1)(-10x+6)$$
$$=2(-5x^2+6x+1)(-10x+6)$$

يمكن استنتاج قاعدة جديدة لحساب مشتقة الدالة f^n

$$\left[f^n(x)\right]'=n\times f^{n-1}(x)\times f'(x)$$

$$f(x)=(4x-9)^2...(10)$$

$D=I=R$ ومن أجل كل x من I

$$f'(x)=2(4x-9)(4)=8(4x-9)=32x-72$$

$$f(x)=(2x+1)^2(x+3)=(4x^2+4x+1)(x+3)...(11)$$

$D=I=R$ ومن أجل كل x من I

$$f'(x)=(8x+4)(x+3)+(4x^2+4x+1)(1)=12x^2+32x+13$$

ملاحظة : من أجل الدوال الناطقة (كثير حدود على كثير حدود) $D=I$

$$f(x)=-\frac{4}{x}=(-4)\left(\frac{1}{x}\right)...(13)$$

$$(\lambda\times f)'=\lambda\times f'$$

$D=I=R^*$ ومن أجل كل x من I

$$f'(x)=(-4)\left(\frac{-1}{x^2}\right)=\frac{4}{x^2}$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)'=-\frac{f'}{f^2}$$

$$f(x)=\frac{2}{3x-5}=(2)\left(\frac{1}{3x-5}\right)...(14)$$

$D=I=R-\left\{\frac{5}{3}\right\}$ ومن أجل كل x من I

$$f'(x)=(+2)\left(\frac{-3}{(3x-5)^2}\right)=-\frac{6}{(3x-5)^2}$$

$$f(x)=\frac{4x+1}{x-2}...(15)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'.g-f.g'}{g^2}$$

$D=I=R-\{+2\}$ ومن أجل كل x من I

$$f'(x)=\frac{(4)(x-2)-(1)(4x+1)}{(x-2)^2}=\frac{-9}{(x-2)^2}$$

$$f(x)=\frac{x+2}{4x-3}...(16)$$

$D=I=R-\left\{\frac{3}{4}\right\}$ ومن أجل كل x من I

$$f'(x)=\frac{(+1)(4x-3)-(4)(x+2)}{(4x-3)^2}=\frac{-11}{(4x-3)^2}$$

$$f(x)=\frac{2x+1}{3-x}-\frac{x}{5-2x}...(17)$$

$D=I=R-\left\{+\frac{5}{2},+3\right\}$ ومن أجل كل x من I

$$f'(x)=\frac{(+2)(3-x)-(-1)(2x+1)}{(3-x)^2}-\frac{(+1)(5-2x)-(-2)(x)}{(5-2x)^2}=\frac{7}{(3-x)^2}-\frac{5}{(5-2x)^2}$$

$$f(x)=\left(\frac{x-3}{x-2}\right)^2...(19)$$

$D=I=R-\{+2\}$ ومن أجل كل x من I

$$f'(x)=2\left(\frac{x-3}{x-2}\right)\left(\frac{+1}{(x-2)^2}\right)=\frac{2x-6}{(x-2)^3}$$

$$f(x)=\left(\frac{2x-3}{1-x}\right)^2...(20)$$

$D=I=R-\{+1\}$ ومن أجل كل x من I

$$f'(x)=2\left(\frac{2x-3}{1-x}\right)\left(\frac{-1}{(1-x)^2}\right)=\frac{-4x+6}{(1-x)^3}$$

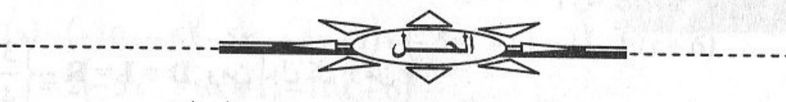


احسب معامل توجيه المماس للمنحني الممثل لكل دالة f من الدوال الآتية في النقطة التي فاصلتها x_0 .

$f(x)=-\frac{2}{3}x^2$ ، $x_0=-2\,...(1)$ $\quad$ $f(x)=2x^2-5x+4$ ، $x_0=-1\,...(2)$

$f(x)=2x^2-3|x+2|-4$ ، $x_0=-3\,...(3)$ $\quad$ $f(x)=\frac{5}{x+3}$ ، $x_0=-2\,...(4)$

$f(x)=\frac{x+2}{1-2x}$ ، $x_0=+1\,...(5)$ ، $f(x)=\frac{3x-2}{x+3}$ ، $x_0=+1\,...(6)$



تذكير: إن معامل توجيه المماس في النقطة التي فاصلتها x_0 هو $f'(x_0)$

$f(x)=-\frac{2}{3}x^2$ ، $x_0=-2\,...(1)$

من أجل x من $\mathbf{R}$ $f'(x)=-\frac{4}{3}x$ ، ومنه : $f'(-2)=\frac{8}{3}$

$f(x)=2x^2-5x+4$ ، $x_0=-1\,...(2)$

من أجل x من $\mathbf{R}$ $f'(x)=4x-5$ ، ومنه : $f'(-1)=-9$

$f(x)=2x^2-3|x+2|-4$ ، $x_0=-3\,...(3)$

من أجل x من $]-\infty,-2]$: $f(x)=2x^2+3x+2$ ، ومنه : $f'(x)=4x+3$

وبالتالي : $f'(-3)=-9$

$f(x)=\frac{5}{x+3}$ ، $x_0=-2\,...(4)$

من أجل x من $\mathbf{R}-\{-3\}$ $f'(x)=\frac{-5}{(x+3)^2}$ ، ومنه : $f'(-2)=-5$

$f(x)=\frac{x+2}{1-2x}$ ، $x_0=+1\,...(5)$

من أجل x من $\mathbf{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$ $f'(x)=\frac{+5}{(1-2x)^2}$ ، ومنه : $f'(+1)=+5$

$f(x)=\frac{3x-2}{x+3}$ ، $x_0=+1\,...(6)$

من أجل x من $\mathbf{R}-\{-3\}$ $f'(x)=\frac{+11}{(x+3)^2}$ ، ومنه : $f'(+1)=\frac{11}{16}$

التمرين23

عين فواصل نقط المنحني الممثل لكل دالة f من الدوال الآتية التي يقبل فيها المماس معامل توجيه m .

$f(x)=x^2+3x-4$ ، $m=\sqrt{3}\,...(1)$ $\quad$ $f(x)=-\frac{2}{x}$ ، $m=\frac{3}{2}\,...(2)$

$f(x)=\frac{5}{x-3}$ ، $m=2\,...(3)$ $\quad$ $f(x)=\frac{2x+3}{x-2}$ ، $m=-1\,...(4)$



$f(x)=x^2+3x-4$ ، $m=\sqrt{3}\,...(1)$

من أجل x من $\mathbf{R}$ $f'(x)=2x+3$. وفواصل النقط هي حلول المعادلة $f'(x)=\sqrt{3}$

لكن $f'(x)=\sqrt{3}$ يكافئ $2x+3=\sqrt{3}$ ومنه $\boxed{x=\frac{-3+\sqrt{3}}{2}}$

$f(x)=-\frac{2}{x}$ ، $m=\frac{3}{2}\,...(2)$

من أجل x من $\mathbf{R}^*$ $f'(x)=\frac{2}{x^2}$. وفواصل النقط هي حلول المعادلة $f'(x)=\frac{3}{2}$

لكن $f'(x)=\frac{3}{2}$ يكافئ $\frac{2}{x^2}=\frac{3}{2}$ ومنه $3x^2-4=0$ وبالتالي

$\boxed{x=-\frac{2}{\sqrt{3}}}$ أو $\boxed{x=+\frac{2}{\sqrt{3}}}$

$f(x)=\frac{5}{x-3}$ ، $m=2\,...(3)$

من أجل x من $\mathbf{R}-\{+3\}$: $f'(x)=\frac{-5}{(x-3)^2}$.

طرف موجب تماما
وآخر سالب تماما

وفواصل النقط هي حلول المعادلة $f'(x)=+2$

لكن $f'(x)=+2$ يكافئ $\frac{-5}{(x-3)^2}=+2$ وهذا مستحيل وبالتالي لا توجد نقط

$f(x)=\frac{2x+3}{x-2}$ ، $m=-1$ ...(4)

من أجل x من $\mathbf{R}-\{+2\}$: $f'(x)=\frac{-7}{(x-2)^2}$.

وفواصل النقط هي حلول المعادلة $f'(x)=-1$

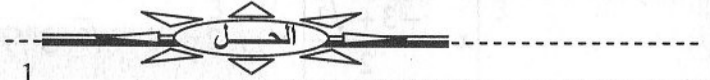
لكن $f'(x)=-1$ يكافئ $\frac{-7}{(x-2)^2}=-1$ ومنه $(x-2)^2=7$ وبالتالي :

$x=2-\sqrt{7}$ أو $x=2+\sqrt{7}$



عين m حتى يكون للمنحني الممثل للدالة f المعرفة كما يلي :

$f(x)=\frac{mx-3}{x+2}$ مماس في النقطة التي فاصلتها ($+1$) معامل توجيهه $+\frac{1}{2}$.



هذه العبارة :" مماس في النقطة التي فاصلتها ($+1$) معامل توجيهه $+\frac{1}{2}$ **" تكافئ**

$$f'(+1)=\frac{1}{2}$$

مشتقة الدالة f على $\mathbf{R}-\{-2\}$ هي $f'(x)=\frac{2m+3}{(x+2)^2}$

لكن $f'(+1)=\frac{1}{2}$ يكافئ $\frac{2m+3}{9}=\frac{1}{2}$ وبالتالي : $m=\frac{3}{4}$



ارسم مماس المنحني الممثل لكل دالة f من الدوال الآتية في النقطة الثابتة التي

فاصلتها x_0 . ثم اكتب معادلة له دون رسم المنحني الممثل للدالة f.

$f(x)=x^2+x-2$ ، $x_0=-1$ ...(1) $\quad f(x)=\frac{x^2}{3}+\frac{2x}{5}$ ، $x_0=\frac{1}{3}$ ...(2)

$f(x)=\frac{2}{x}$ ، $x_0=+1$ ...(3) $\quad f(x)=\frac{3x+2}{1-2x}$ ، $x_0=-2$ ...(4)

$f(x)=\frac{5x-2}{3x+4}$ ، $x_0=\frac{2}{5}$ ...(5) $\quad f(x)=\frac{1}{x^2}$ ، $x_0=-2$ ...(6)

$f(x)=\frac{3}{x^2+1}$ ، $x_0=-1$ ...(7) $\quad f(x)=2x^4-3x^2$ ، $x_0=-1$ ...(8)

$f(x)=\frac{x^2-3x+1}{x^2+x+1}$ ، $x_0=-1$ ...(9) $\quad f(x)=\frac{x^2+4x-5}{(x-2)^2}$ ، $x_0=-2$ ...(10)

$f(x)=-x^2+2|x-3|$ ، $x_0=+3$ ...(11)

$f(x)=(x-3)|x+1|$ ، $x_0=-2$ ...(12) $\quad f(x)=\frac{2x+1}{|x-3|}$ ، $x_0=-1$ ...(13)

$f(x)=\left|\frac{3x+2}{x-1}\right|$ ، $x_0=-\frac{2}{3}$ ...(14)

الحل

تذكير(1): المماس ذو معامل التوجيه m في النقطة $A(x_0,y_0)$ هو المستقيم المار بالنقطتين A و P حيث $\overrightarrow{AH}=k\vec{i}$ و $\overrightarrow{HP}=km\vec{j}$ (k عدد ناطق)

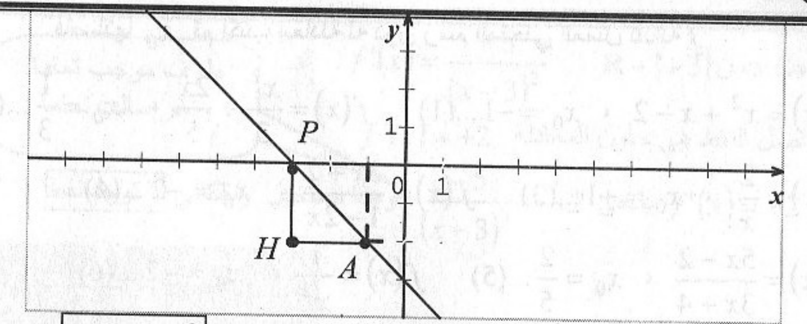
تذكير(2): $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ هي معادلة المماس في النقطة التي فاصلتها x_0 من المنحني الممثل للدالة f .

$f(x)=x^2+x-2$ ، $x_0=-1$ ...(1)

من أجل كل x من $\mathbf{R}$ $f'(x)=2x+1$ ومنه $f'(-1)=-1$ و $f(-1)=-2$

لنرسم المماس ذا معامل التوجيه(-1) المار بالنقطتين $A(-1,-2)$ و P

حيث $\overrightarrow{AH}=(-2)\vec{i}$ و $\overrightarrow{HP}=(-2)(-1)\vec{j}$ (نأخذ ، مثلا ، $k=-2$)



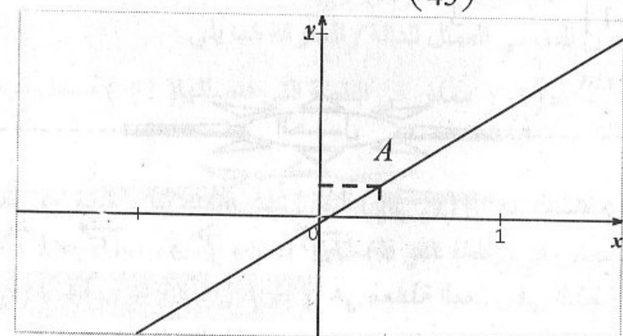
وبالتعويض نجد : $y=-1(x+1)-2$ ومعادلة المماس هي : $y=-x-3$

$f(x)=\frac{x^2}{3}+\frac{2x}{5}$ ، $x_0=\frac{1}{3}$ ...(2)

من أجل كل x من $\mathbf{R}$ $f'(x)=\frac{2}{3}x+\frac{2}{5}$ ومنه $f'\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{28}{45}$ و $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{23}{135}$

لنرسم المستقيم ذا معامل التوجيه $\frac{28}{45}$ المار بالنقطتين $A\left(\frac{1}{3},\frac{23}{135}\right)$ و P

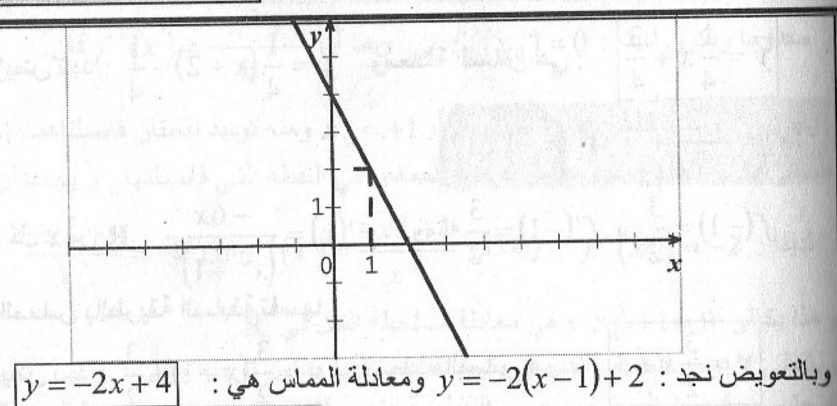
حيث $\overrightarrow{AH}=(2)\vec{i}$ و $\overrightarrow{HP}=(2)\left(\frac{28}{45}\right)\vec{j}$ (نأخذ ، مثلا ، $k=2$)



وبالتعويض نجد : $y=\frac{28}{45}\left(x-\frac{1}{3}\right)+\frac{23}{135}$ ومعادلة المماس هي : $y=\frac{28}{45}x-\frac{5}{135}$

$f(x)=\frac{2}{x}$ ، $x_0=+1$ ...(3)

من أجل كل x من $\mathbf{R}^*$ $f'(x)=-\frac{2}{x^2}$ ومنه $f'(+1)=-2$ و $f(+1)=+2$



وبالتعويض نجد : $y=-2(x-1)+2$ ومعادلة المماس هي : $y=-2x+4$

$f(x)=\frac{3x+2}{1-2x}$ ، $x_0=-2$ ...(4)

من أجل كل x من $\mathbf{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$ $f'(x)=\frac{7}{(1-2x)^2}$ ومنه $f'(-2)=\frac{7}{25}$ و $f(-2)=-\frac{4}{5}$ ويرسم المماس بالطريقة السابقة نفسها .

و بالتعويض نجد : $y=\frac{7}{25}(x+2)-\frac{4}{5}$ ومعادلة المماس هي : $y=\frac{7}{25}x-\frac{6}{25}$

$f(x)=\frac{5x-2}{3x+4}$ ، $x_0=\frac{2}{5}$ ...(5)

من أجل كل x من $\mathbf{R}-\left\{-\frac{4}{3}\right\}$ $f'(x)=\frac{26}{(3x+4)^2}$

ومنه $f'\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{25}{26}$ و $f\left(\frac{2}{5}\right)=0$ ويرسم المماس بالطريقة السابقة نفسها.

وبالتعويض نجد : $y=\frac{25}{26}\left(x-\frac{2}{5}\right)+0$ ومعادلة المماس هي : $y=\frac{25}{26}x-\frac{5}{13}$

$f(x)=\frac{1}{x^2}$ ، $x_0=-2$ ...(6)

من أجل كل x من $\mathbf{R}-\{0\}$ $f'(x)=\frac{-2x}{x^4}$ ومنه $f'(-2)=\frac{1}{4}$ و $f(-2)=\frac{1}{4}$

ويرسم المماس بالطريقة السابقة نفسها.

و بالتعويض نجد : $y=\frac{1}{4}(x+2)+\frac{1}{4}$ ومعادلة المماس هي : $y=\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}$

$f(x)=\frac{3}{x^2+1}$ ، $x_0=-1$ ...(7)

من أجل كل x من $\mathbf{R}$ $f'(x)=\frac{-6x}{(x^2+1)^2}$ ومنه $f'(-1)=\frac{3}{2}$ و $f(-1)=\frac{3}{2}$

ويرسم المماس بالطريقة السابقة نفسها.

و بالتعويض نجد : $y=\frac{3}{2}(x+1)+\frac{3}{2}$ ومعادلة المماس هي : $y=\frac{3}{2}x+3$

$f(x)=2x^4-3x^2$ ، $x_0=-1$ ...(8)

من أجل كل x من $\mathbf{R}$ $f'(x)=8x^3-6x$ ومنه $f'(-1)=-2$ و $f(-1)=-1$

ويرسم المماس بالطريقة السابقة نفسها.

وبالتعويض نجد : $y=-2(x+1)-1$ ومعادلة المماس هي : $y=-2x-3$

$f(x)=\frac{x^2-3x+1}{x^2+x+1}$ ، $x_0=-1$ ...(9)

من أجل كل x من $\mathbf{R}$ $f'(x)=\frac{4x^2-4}{(x^2+x+1)^2}$ ومنه $f'(-1)=0$ و $f(-1)=5$

ويرسم المماس بالطريقة السابقة نفسها.

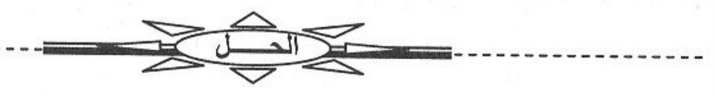
وبالتعويض نجد : $y=0(x+1)+5$ ومعادلة المماس هي : $y=5$



لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي : $f(x)=\frac{-x^2+2x-1}{x}$

عين نقط المنحني الممثل للدالة f

- التي يكون فيها المماس أفقيا.
- التي يكون فيها مماس معامل توجيهه (2−).
- التي يكون فيها المماس موازيا للمستقيم ذي المعادلة : $y=-\frac{1}{2}x-5$



- حتى يكون **المماس أفقيا** في النقطة التي فاصلتها x_0, يجب أن يكون **معامل توجيهه**

معدوما ويكون لدينا : $f'(x_0)=0$, وبما أن $f'(x)=\frac{-x^2+1}{x^2}$ فإن $-x_0^2+1=0$ وبالتالي إما $x_0=-1$ أو $x_0=+1$ ومنه توجد نقطتان فاصلتاهما: 1− , 1.

- حتى يكون **العدد (2−) معامل توجيه للمماس** في النقطة التي فاصلتها x_0 يجب أن يكون لدينا : $f'(x_0)=-2$, وبما أن $f'(x)=\frac{-x^2+1}{x^2}$ فإن $\frac{-x_0^2+1}{x_0^2}=-2$

وهذا يكافئ $x_0^2+1=0$ وهي معادلة مستحيلة الحل في $\mathbb{R}$

وبالتالي لا توجد نقط من المنحني يكون للمماس فيها معامل توجيه هو2−.

- حتى يكون المماس, في النقطة التي فاصلتها x_0, موازيا للمستقيم ذي المعادلة $y=-\frac{1}{2}x-5$, يجب أن يكون معامل توجيهه يساوي $-\frac{1}{2}$

اي : $f'(x_0)=-\frac{1}{2}$, وبما أن $f'(x)=\frac{-x^2+1}{x^2}$ فإن $\frac{-x_0^2+1}{x_0^2}=-\frac{1}{2}$

وهذا يكافئ $x_0^2-2=0$ وبالتالي إما $x_0=-\sqrt{2}$ أو $x_0=+\sqrt{2}$

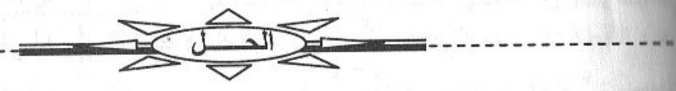
ومنه توجد نقطتان فاصلتاهما: $-\sqrt{2}$, $+\sqrt{2}$.

التمرين27

لتكن f و g دالتين معرفتين كما يلي : $f(x)=\frac{1}{x+1}$ و $g(x)=x^2+bx+c$

حيث b و c عددان حقيقيان .

عين b و c حتى يقبل المنحنيين C_f و C_g نفس المماس في النقطة $A(0,1)$



إذا كان للمنحنيين C_f و C_g نفس المماس في النقطة $A(0,1)$ فإنه يكون

$\begin{cases} f'(0)=g'(0) \\ f(0)=g(0)=1 \end{cases}$ وبما أن $f'(x)=\frac{-1}{(x+1)^2}$ و $g'(x)=2x+b$

فإن $f'(0)=-1$ وبالتالي $2(0)+b=-1$ ومنه **$b=-1$**

وبما أن $f(0)=1$ فإن $g(0)=1$ وبالتالي $(0)^2-(0)+c=1$ ومنه **$c=1$**

تطبيقات الدالة المشتقة :

1) اتجاه التغير:

◊ إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I وكان من أجل كل x من I $f'(x)>0$ فإن الدالة f **متزايدة تماما** على I.

◊ إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I وكان من أجل كل x من I $f'(x)<0$ فإن الدالة f **متناقصة تماما** على I.

◊ إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I وكان من أجل كل x من I $f'(x)=0$ فإن الدالة f **ثابتة** على I.

أمثلة :

◊ الدالة f المعرفة على $\mathbf{D}=\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=x^3-3x+2$.

إن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbf{I}=\mathbb{R}$ ، و $f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)$

نلاحظ أن إشارة $f'(x)$ من إشارة كثير الحدود x^2-1 وهذا ملخص إشارته

x	$-\infty$ -1 $+1$ $+\infty$
$f'(x)$	+ 0 − 0 +

ومنه: على المجال $]-\infty,-1[\cup]+1,+\infty[$ الدالة f متزايدة تماما.

وعلى المجال $]-1,+1[$ الدالة f متناقصة تماما.

◊ الدالة f المعرفة على $\mathbf{D}=\mathbb{R}-\{+1\}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{-2x+1}{x-1}$.

إن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbf{I}=\mathbb{R}-\{+1\}$ ، و $f'(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$

وهذا الكسر الناطق موجب تماما على $\mathbf{I}$ ومنه :

على المجال $]-\infty,+1[\cup]+1,+\infty[$ الدالة f متزايدة تماما.

◊ الدالة f المعرفة على $\mathbf{D}=\mathbb{R}-\{+1\}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$.

إن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbf{I}=\mathbb{R}-\{+1\}$ ، و $f'(x)=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$

وإشارة هذا الكسر الناطق من إشارة البسط , وهذا ملخص إشارته

x	$-\infty$ 0 2 $+\infty$
$f'(x)$	+ 0 − 0 +

ومنه : على المجال $]-\infty,0[\cup]+2,+\infty[$ الدالة f متزايدة تماما.

وعلى المجالين $]0,+1[$ و $]+1,+2[$ الدالة f متناقصة تماما .

2) القيم الحدية لدالة :

◊ f دالة معرفة على $\mathbf{D}$ ، $\mathbf{I}$ مجال بحيث $\mathbf{I}\subset\mathbf{D}$ ($\mathbf{I}$ محتواة في $\mathbf{D}$)، a عنصر من $\mathbf{I}$

إذا كان من أجل كل x من $\mathbf{I}$ ، $f(x)\le f(a)$ فإن $f(a)$ قيمة حدية كبرى نسبية للدالة f.

إذا كان من أجل كل x من $\mathbf{I}$ ، $f(x)\ge f(a)$ فإن $f(a)$ قيمة حدية صغرى نسبية للدالة f

ملاحظة : إذا كانت $\mathbf{I}=\mathbf{D}$ تكون القيمة الحدية مطلقة .

◊ – إذا كانت f دالة تقبل **نهاية حدية كبرى** عند العدد a وكانت تقبل الاشتقاق عند a فإن $f'(a)=0$.

– والعكس إذا كانت f دالة تقبل الاشتقاق على مجال مفتوح يشمل عددا a وكان $f'(a)=0$ وكانت $f'(x)$ تغير إشارتها عند a فإن $f(a)$ قيمة حدية كبرى للدالة f .

فمثلا : للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=3x^2-2x+1$ نهاية حدية صغرى عند القيمة $x_0=\dfrac{1}{3}$ لأن :

(1) ليكن المجال المفتوح $\mathbf{I}=]0,1[$ الذي يشمل $x_0=\dfrac{1}{3}$ (وهو مجال من $\mathbb{R}$)

2) من أجل كل x من المجال $\mathbf{I}$: $f(x)\ge f\left(\dfrac{1}{3}\right)$

3) نقطة الانعطاف :

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على $[a,b]$

وكانت $M_0(x_0,f(x_0))$ نقطة من القوس AB

بحيث يخترق المنحني الممثل للدالة f مماسه في هذه النقطة فإن النقطة M_0

نسمي : " نقطة انعطاف المنحني C_f "

نتيجة : البحث عن احداثيي نقطة الانعطاف

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق مرتين على مجال مفتوح يشمل x_0 وإذا **انعدمت** دالتها المشتقة الثانية من أجل x_0 , **مغيرة إشارتها** فإن النقطة $M_0(x_0,f(x_0))$

من المنحني الممثل للدالة f هي نقطة انعطاف للمنحني الممثل للدالة f .

دراسة الدوال :

I. دراسة التغيرات وخطواتها هي :

1– تعيين مجموعة التعريف **D** , وهي $\mathbb{R}$ أو جزء من $\mathbb{R}$ (إلا إذا أعطيت)
2– دراسة شفعية الدالة أو دوريتها بقصد تقليص مجال الدراسة ، إذ يمكنك حصر الدراسة على مجموعة القيم الموجبة أو المعدومة.
3– حساب نهايات الدالة على أطراف مجال الدراسة .
4– حساب الدالة المشتقة على المجال الذي تقبل علية الدالة الإشتقاق.
5– دراسة إشارة الدالة المشتقة على **D** واستنتاج اتجاه تغير الدالة .
6– تسجيل النتائج المتحصل عليها في جدول تغيرات الدالة.

II. رسم المنحني الممثل للدالة

قبل رسم المنحني ننجز بالآتي :

1– دراسة الفروع اللانهائية .
2– تحديد النقط الخاصة من خلال حساب إحداثياتها . ومن أهم هذه النقط :
– نقط تقاطع المنحني مع محوري الإحداثيات .
– النقط الحدية (من جدول التغيرات).
– غيرها (حسب المطلوب).

ثم نرسم المنحني بإتباع الخطوات الآتية :

1– نرسم المعلم حسب الطلب .
2– نرسم المستقيمات المقاربة باستعمال معادلاتها .
3– نرسم النقط الخاصة , مع رسم المماسات , إن توفرت , عندها .
4– نرسم المنحني بالاستعانة بجدول التغيرات فهو المرشد الأمين في هذه المرحلة الحاسمة .

أمثلة على دراسة الدوال :

الدوال الناطقة :

لندرس الدالة f المعرفة كما يلي : $f(x)=\dfrac{x^2-5x+7}{x-2}$

لندرس اتجاه التغير أولاً :

(أ) مجموعة التعريف : الدالة f معرفة على المجال $]-\infty,+2[\cup]+2,+\infty[$

(ب) حساب النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty} x=-\infty \quad ، \quad \lim_{x\xrightarrow{<}+2} f(x)=\frac{+1}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}+2} f(x)=\frac{+1}{0^+}=+\infty \quad ، \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$$

(جـ) الدالة المشتقة :

من أجل كل x من $]-\infty,+2[\cup]+2,+\infty[$ $\quad f'(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$

وإشارته من إشارة x^2-4x+3

(د) جدول التغيرات :

x	$-\infty$		$+1$		$+2$		$+3$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-3	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$+1$	↗	$+\infty$

ثم نرسم المنحني الممثل للدالة f :

◊ المعلم المختار متعامد ومتجانس.
◊ دراسة الفروع اللانهائية :

بما أن $\lim_{x\to+2} f(x)=\pm\infty$ فإن $x=+2$ مستقيم مقارب يوازي $(y'y)$.

وبما أن $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ ، ننجز الخطوات الآتية :

في جوار $-\infty$

(أ) نحسب $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-5x+7}{x^2-2x}=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$

(ب) نحسب $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(+1)x]=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{-3x+7}{x-2}=-3$

(جـ) يقبل المنحني مستقيما مقاربا (مائلا) معادلته $y=(+1)x+(-3)=x-3$

في جوار $+\infty$ نفس النتيجة السابقة.

تذكير: لإثبات أن المستقيم الذي معادلته $y=ax+b$ مستقيم مقارب للمنحني

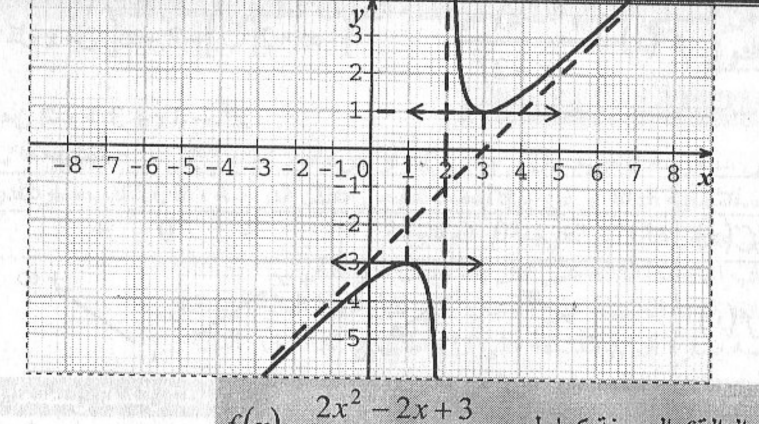
يكفي أن نثبت أن : $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$

ففي المثال السابق : بما أن $\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{+1}{x-2}=0$ فإن : $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-(x-3)]=0$

$y=x-3$ مستقيم مقارب للمنحني .

◊ جدول القيم العددية : من جدول التغيرات

x	$+1$	$+3$
$f(x)$	-3	$+1$



لندرس الدالة f المعرفة كما يلي : $f(x)=\dfrac{2x^2-2x+3}{(x+2)^2}$

لندرس اتجاه التغير أولا :

(أ) مجموعة التعريف : الدالة f معرفة على المجال $]-\infty,-2[\cup]-2,+\infty[$

(ب) حساب النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{x^2}=+2 \quad ، \quad \lim_{x\xrightarrow{<}-2} f(x)=\frac{+15}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}-2} f(x)=\frac{+15}{0^+}=+\infty \quad ، \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2}=+2$$

(ج) الدالة المشتقة :

من أجل كل x من $]-\infty,-2[\cup]-2,+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{10(x-1)(x+2)}{(x+2)^4}$

وإشارته من إشارة $(x-1)(x+2)$

(د) جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-2		$+1$		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	−	0	+	
$f(x)$	$+2$ ↗		$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$+\frac{1}{3}$	↗	$+2$

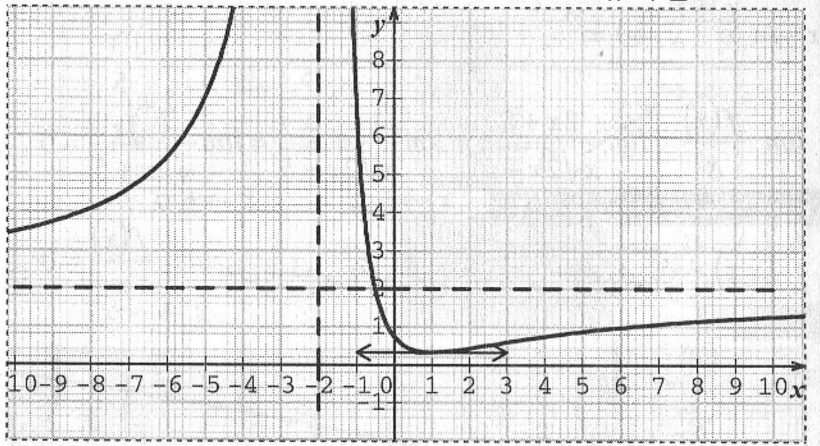
ثم نرسم المنحني الممثل للدالة f :

◊ المعلم المختار متعامد ومتجانس.

◊ دراسة الفروع اللانهائية :

بما أن $\lim_{x\to-2} f(x)=+\infty$ فإن $x=-2$ مستقيم مقارب يوازي $(y'y)$ ، حسب القاعدة (1)

بما أن $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=+2$ فإن $y=+2$ مستقيم مقارب يوازي $(x'x)$. حسب القاعدة (2)



الدوال الصماء :

لندرس الدالة f المعرفة كما يلي : $f(x)=\sqrt{2x+5}$

لندرس اتجاه التغير أولا :

(أ) مجموعة التعريف : الدالة f معرفة على المجال $\left[-\frac{5}{2},+\infty\right[$

(ب) حساب النهايات : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

(ج) الدالة المشتقة :

من أجل كل x من $\left]-\frac{5}{2},+\infty\right[$ $f'(x)=\dfrac{2}{2\sqrt{2x+5}}$ وإشارته موجبة.

(د) جدول التغيرات :

x	$-\frac{5}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$

ثم نرسم المنحني الممثل للدالة f :

◊ المعلم المختار متعامد ومتجانس.

◊ دراسة الفروع اللانهائية :

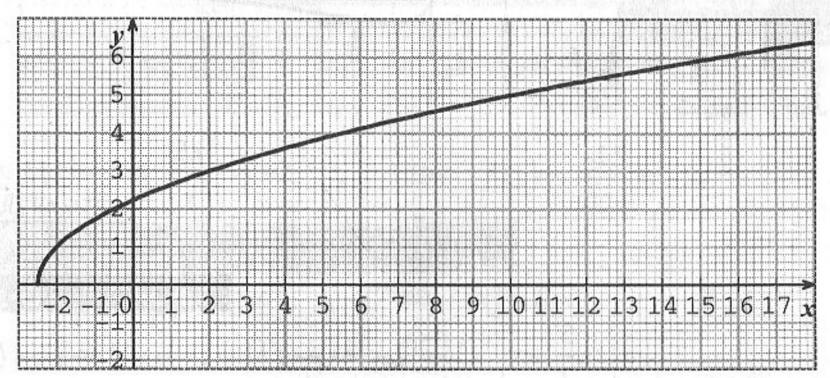
في جوار $+\infty$

(أ) نحسب

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x+5}}{x}=\frac{+\infty}{+\infty}\ ?$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+5}{x\sqrt{2x+5}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(2+\frac{5}{x}\right)}{x\sqrt{2x+5}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{5}{x}}{\sqrt{2x+5}}=0$$

وبما أن $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ فإن المنحني يقبل **فرعا من قطع مكافئ** في اتجاه $(x'x)$



لندرس الدالة f المعرفة كما يلي : $f(x)=\sqrt{x^2-4x+3}$

لندرس اتجاه التغير أولاً :

(أ) مجموعة التعريف : الدالة f معرفة على المجال $]-\infty,+1]\cup[+3,+\infty[$

(ب) حساب النهايات : $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ لأن $\lim_{x\to-\infty}(x^2-4x+3)=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ لأن $\lim_{x\to+\infty}(x^2-4x+3)=+\infty$

(جـ) الدالة المشتقة : من أجل كل x من $]-\infty,+1[\cup]+3,+\infty[$

$$f'(x)=\frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+3}}$$

و إشارته من إشارة $2x-4$ وهو عبارة عن ثنائي حد من الدرجة الأولى جذره $+2$

وملخص إشارته على $]-\infty,+1[\cup]+3,+\infty[$ هو

يكون $f'(x)>0$ إذا وفقط إذا كان x من المجال $]+3,+\infty[$

يكون $f'(x)<0$ إذا وفقط إذا كان x من المجال $]-\infty,+1[$

(د) جدول التغيرات :

x	$-\infty$	$+1$	$+3$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$			$+$
$f(x)$	$+\infty \searrow 0$			$0 \nearrow +\infty$

ثم نرسم المنحني الممثل للدالة f :

◊ المعلم المختار متعامد ومتجانس.

◊ دراسة الفروع اللانهائية :

في جوار $-\infty$

(أ) نحسب $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{|x|\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}}{x}\right)$$

وبما أن x في جوار $-\infty$ فإن $|x|=-x$ وبالتالي

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-x\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)=-1$$

(ب) نحسب $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(-x)]$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)+x]=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+3}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4x+3}{\sqrt{x^2-4x+3}-x}$$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)+x]=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(-4+\frac{3}{x}\right)}{x\left(-\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}-1\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4+\frac{3}{x}}{-\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}-1}=\frac{-4}{-2}=2$$

(جـ) يقبل المنحني مستقيما مقاربا معادلته $y=-x+2$ في جوار $+\infty$

(أ) نحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{|x|\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}}{x}\right)$$

وبما أن x في جوار $+\infty$ فإن $|x|=+x$ وبالتالي

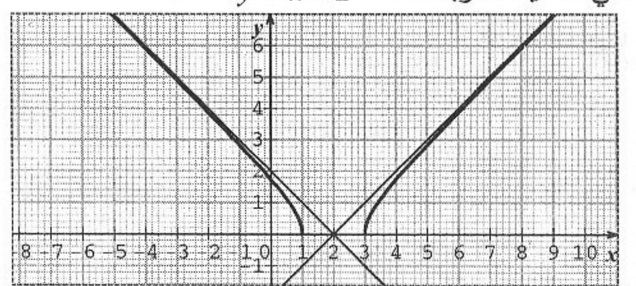
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)=1$$

(ب) نحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+3}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x+3}{\sqrt{x^2-4x+3}+x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-4+\frac{3}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4+\frac{3}{x}}{\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}+1}=\frac{-4}{2}=-2$$

(جـ) يقبل المنحني مستقيما مقاربا معادلته $y=x-2$



الـــــدوال الناطقـــــة

التمرين 28

ادرس اتجاه تغير الدوال الآتية ثم ارسم المنحنيات الممثلة لها في معلم متعامد ومتجانس.

$f(x)=\dfrac{2x^2-5x+1}{x+1}\ ...(1)$ ، $f(x)=\dfrac{x^2+3x-1}{x+2}\ ...(2)$

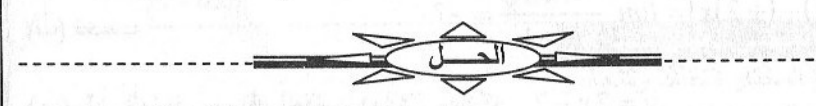
$f(x)=\dfrac{x}{x^2+6x+8}\ ...(3)$ ، $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2+x+5}\ ...(4)$

$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-4}\ ...(5)$ ، $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+1}\ ...(6)$

$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+4}\ ...(7)$ ، $f(x)=\dfrac{x^2-4x-5}{(x-2)^2}\ ...(8)$

$f(x)=\dfrac{x^2-5x+7}{x-2}\ ...(9)$ ، $f(x)=x^2+\dfrac{1}{1-x^2}\ ...(10)$

$f(x)=\dfrac{x}{(x+3)^4}\ ...(11)$ ، $f(x)=\dfrac{2x^3-5x^2+x+2}{x^2+x-6}\ ...(12)$



$$f(x)=\frac{2x^2-5x+1}{x+1}\ ...(1)$$

لندرس اتجاه التغير أولاً :

(أ) مجموعة التعريف : الدالة f معرفة على المجال $]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$

(ب) حساب النهايات :

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}2x=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1}f(x)=\dfrac{+8}{0^-}=-\infty$

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}f(x)=\dfrac{+8}{0^+}=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}2x=+\infty$

(جـ) الدالة المشتقة :

من أجل كل x من $]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$

$$f'(x)=\frac{2(x^2+2x-3)}{(x-2)^2}$$

وإشارته من إشارة x^2+2x-3 وبالتالي تنعدم الدالة المشتقة من أجل القيمتين $+1$ و-3 وتكون موجبة على $]-\infty,-3[\cup]+1,+\infty[$ وسالبة على $]-3,-1[\cup]-1,+1[$.

(د) جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-3		-1		$+1$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-17	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

ثم نرسم المنحني الممثل للدالة f :

◊ المعلم المختار متعامد ومتجانس.

◊ دراسة الفروع اللانهائية :

بما أن $\lim_{x\to -1} f(x)=\pm\infty$ فإن للمنحني مستقيما مقاربا يوازي $(y'y)$ معادلته $x=-1$

في جوار $-\infty$

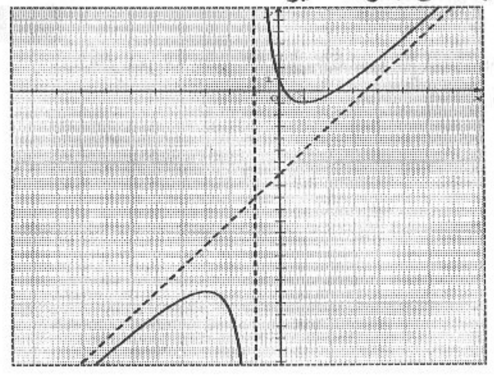
(أ) نحسب $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-5x+1}{x^2-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{x^2}=+2$

(ب) نحسب $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(+2)x]=\lim_{x\to-\infty}\frac{-7x+1}{x+1}=-7$

(جـ) يقبل المنحني مستقيما مقاربا (مائلا) معادلته $y=2x-7$

في جوار $+\infty$ نفس النتيجة السابقة.

◊ جدول القيم العددية : من جدول التغيرات



$$f(x)=\frac{x^2+3x-1}{x+2}\ ...(2)$$

لندرس اتجاه التغير أولاً :

(أ) مجموعة التعريف : الدالة f معرفة على المجال $]-\infty,-2[\cup]-2,+\infty[$

(ب) حساب النهايات :

$\lim_{x \xrightarrow{<} -2} f(x)=\frac{-3}{0^-}=+\infty$ ، $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$ ، $\lim_{x \xrightarrow{>} -2} f(x)=\frac{-3}{0^+}=-\infty$

(جـ) الدالة المشتقة :

من أجل كل x من $]-\infty,-2[\cup]-2,+\infty[$

$$f'(x)=\frac{x^2+4x+7}{(x+2)^2}$$

وإشارته من إشارة x^2+4x+7 والدالة المشتقة موجبة على $]-\infty,-2[\cup]-2,+\infty[$.

(د) جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

ثم نرسم المنحني الممثل للدالة f :

◊ المعلم المختار متعامد ومتجانس.

◊ دراسة الفروع اللانهائية :

بما أن $\lim_{x\to -2} f(x)=\pm\infty$ فإن للمنحني مستقيما مقاربا يوازي $(y'y)$ معادلته $x=-2$

في جوار $-\infty$

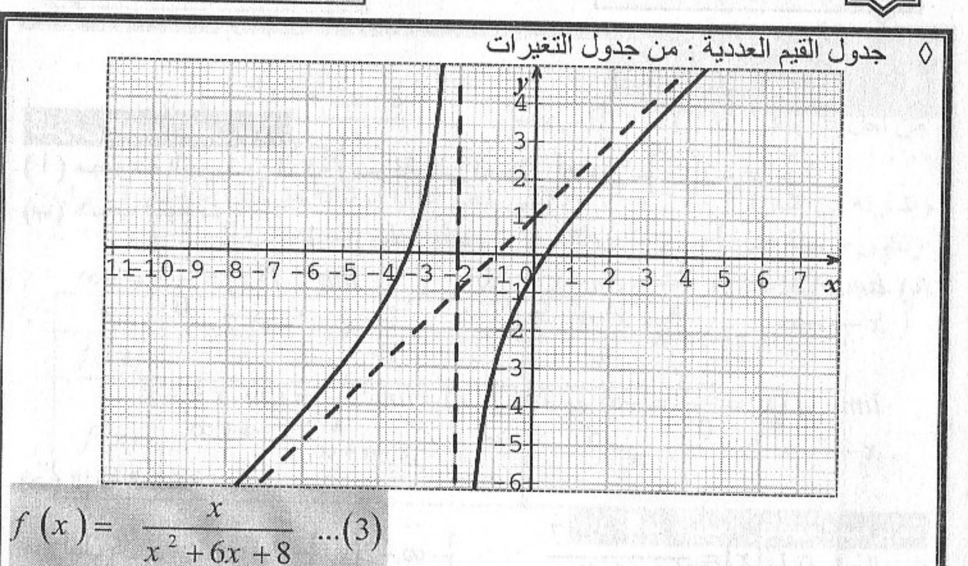
(أ) نحسب $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3x-1}{x^2+2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=+1$

(ب) نحسب $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(+1)x]=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{x+2}=+1$

(جـ) يقبل المنحني مستقيما مقاربا (مائلا) معادلته $y=x+1$

في جوار $+\infty$ نفس النتيجة السابقة.

◊ جدول القيم العددية : من جدول التغيرات



$$f(x)=\frac{x}{x^2+6x+8}\quad ...(3)$$

لندرس اتجاه التغير أولاً :

(أ) مجموعة التعريف : الدالة f معرفة على المجال $]-\infty,-4[\cup]-4,-2[\cup]-2,+\infty[$

(ب) حساب النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0 \quad ، \quad \lim_{x\xrightarrow{<}-4} f(x)=\frac{-4}{0^+}=-\infty$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}-4} f(x)=\frac{-4}{0^-}=+\infty \quad ، \quad \lim_{x\xrightarrow{<}-2} f(x)=\frac{-2}{0^-}=+\infty$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}-2} f(x)=\frac{-2}{0^+}=-\infty \quad ، \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

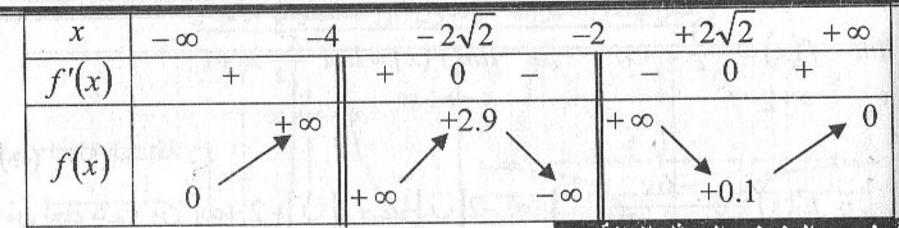
(جـ) الدالة المشتقة :

من أجل كل x من $]-\infty,-4[\cup]-4,-2[\cup]-2,+\infty[$ $\quad f'(x)=\frac{-x^2+8}{(x^2+6x+8)^2}$

وإشارته من إشارة $-x^2+8$ وتنعدم الدالة المشتقة من أجل القيمتين : $+2\sqrt{2}$ ، $-2\sqrt{2}$

وتكون سالبة على: $]-\infty,-2\sqrt{2}[\cup]+2\sqrt{2},+\infty[$ وموجبة على المجال $]-2\sqrt{2},+2\sqrt{2}[$

(د) جدول التغيرات :



x	$-\infty$		-4		$-2\sqrt{2}$		-2		$+2\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	+	0	−	‖	−	0	+	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↗	+2.9	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	+0.1	↗	0

ثم نرسم المنحني الممثل للدالة f :

◊ المعلم المختار متعامد ومتجانس.

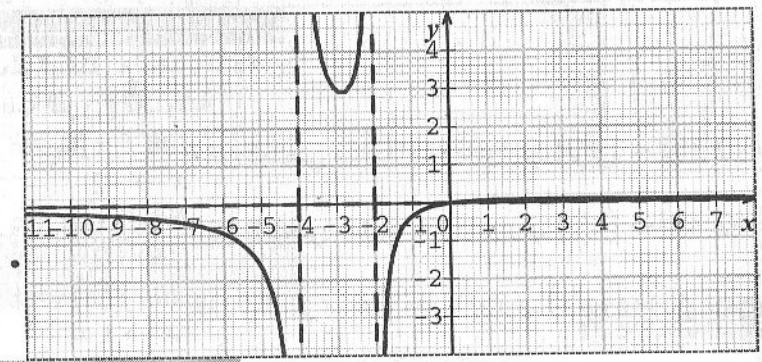
◊ دراسة الفروع اللانهائية :

بما أن $\lim_{x\to-4} f(x)=\pm\infty$ فإن للمنحني مستقيما مقاربا يوازي $(y'y)$ معادلته $x=-4$

بما أن $\lim_{x\to-2} f(x)=\pm\infty$ فإن للمنحني مستقيما مقاربا يوازي $(y'y)$ معادلته $x=-2$

بما أن $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$ فإن $(x'x)$ مقارب للمنحني .

◊ جدول القيم العددية : نكتفي بما في جدول التغيرات .



$$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-4}\quad ...(5)$$

لندرس اتجاه التغير أولاً :

(أ) مجموعة التعريف : الدالة f معرفة على المجال $]-\infty,-2[\cup]-2,+2[\cup]+2,+\infty[$

(ب) حساب النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=+1 \quad ، \quad \lim_{x\xrightarrow{<}-2} f(x)=\frac{+3}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}-2} f(x)=\frac{+3}{0^-}=-\infty \quad ، \quad \lim_{x\xrightarrow{<}+2} f(x)=\frac{+3}{0^-}=-\infty \ .$$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} +2} f(x)=\frac{+3}{0^+}=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=+1$

(جـ) الدالة المشتقة :

من أجل كل x من $]-\infty,-2[\cup]-2,+2[\cup]+2,+\infty[$: $f'(x)=\frac{-6x}{(x^2-4)^2}$

وإشارته من إشارة $-6x$ وتنعدم الدالة المشتقة من أجل القيمة : 0

وتكون سالبة على: $]0,+2[\cup]+2,+\infty[$ وموجبة على المجال $]-\infty,-2[\cup]-2,0[$

(د) جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-2		0		$+2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	$+1$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\frac{1}{4}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$+1$

ثم نرسم المنحني الممثل للدالة f :

◊ المعلم المختار متعامد ومتجانس.

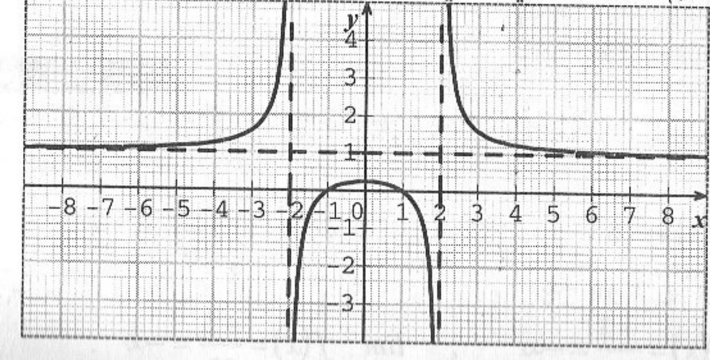
◊ دراسة الفروع اللانهائية :

بما أن $\lim\limits_{x\to-2} f(x)=\pm\infty$ فإن للمنحني مستقيما مقاربا يوازي $(y'y)$ معادلته $x=-2$

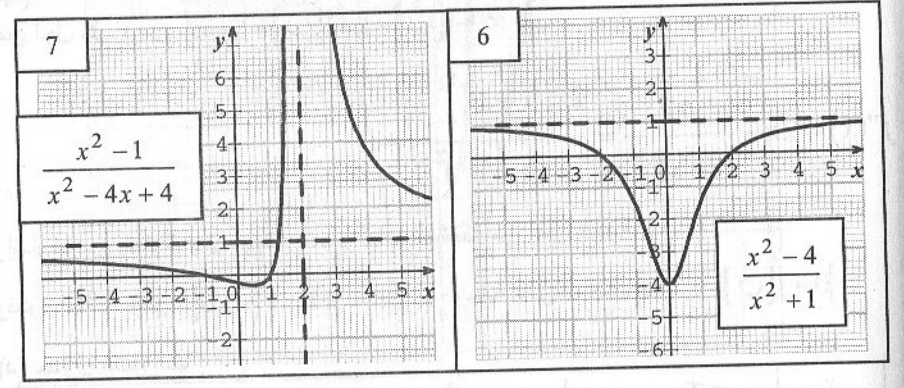
بما أن $\lim\limits_{x\to+2} f(x)=\pm\infty$ فإن للمنحني مستقيما مقاربا يوازي $(y'y)$ معادلته $x=+2$

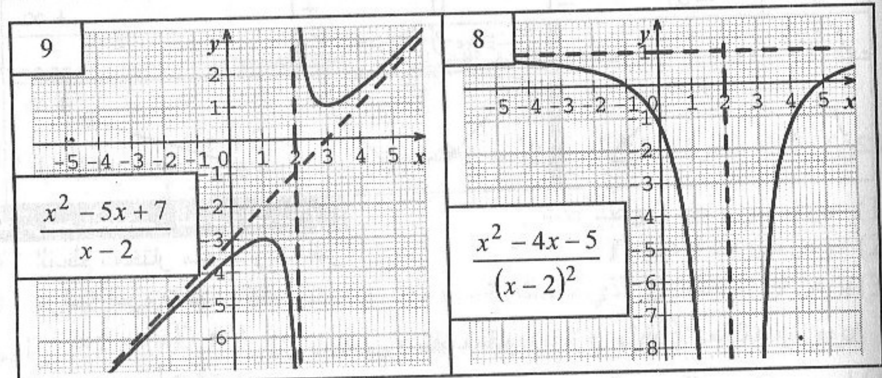
بما أن $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+1$ فإن للمنحني مستقيما مقاربا يوازي $(x'x)$ معادلته $y=+1$

◊ جدول القيم العددية : نكتفي بما في جدول التغيرات .



واصل بنفس الطريقة للوصول إلى المنحنيات الاتية:





$f(x)=x^2+\frac{1}{1-x^2}$ ...(10)

لندرس اتجاه التغير أولا :

(أ) مجموعة التعريف : الدالة f معرفة على المجال $]-\infty,-1[\cup]-1,+1[\cup]+1,+\infty[$

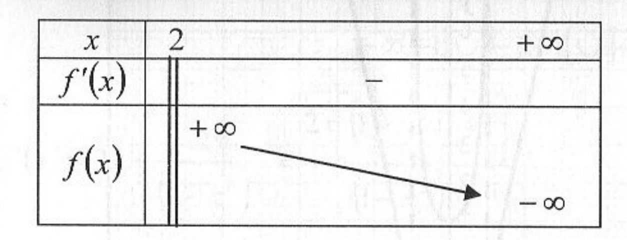
(ب) حساب النهايات :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -1} f(x)=1+\frac{+1}{0^+}=+\infty$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)=+1+\frac{+1}{0^-}=-\infty$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)=+1+\frac{+1}{0^-}=-\infty$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} +1} f(x)=+1+\frac{+1}{0^+}=+\infty$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} +1} f(x)=+1+\frac{+1}{0^-}=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

جدول التغيرات :



x	2	$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$
$f(x)$	|| $+\infty$	↘ $-\infty$

3)بما أن $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(-x-1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-2}=0$

فإن المستقيم D الذي معادلته $y=-x-1$ مستقيم مقارب للمنحني C_f .

لدراسة وضعية C_f بالنسبة إلى D , ندرس إشارة الفرق $f(x)-(-x-1)$

نلاحظ أن إشارة الفرق $f(x)-(-x-1)=\frac{1}{x-2}$ من إشارة $x-2$.

ولدينا من أجل كل x من I , $x-2>0$. وبالتالي يقع C_f فوق D .

4) قبل الشروع في الرسم

- نعين معادلة المماس T وشكلها العام هو : $y=f'(3)(x-3)+f(3)$.

وبما أن $f'(3)=-2$ و $f(3)=-3$ فإن معادلة T هي : $y=-2x+3$

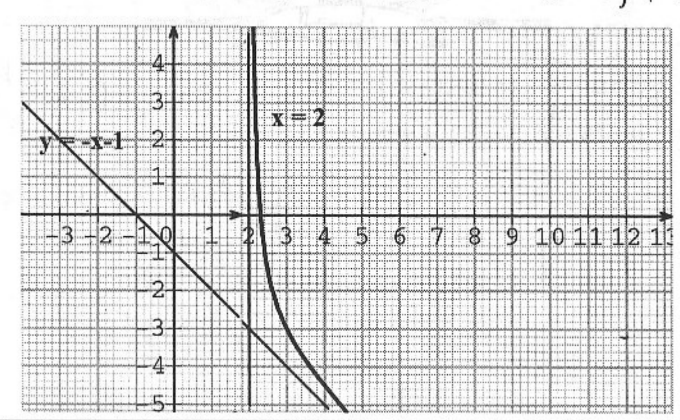
- نلاحظ أن C_f يقبل مستقيما مقاربا – آخر – عموديا معادلته $x=2$

لأن $\lim_{x \underset{>}{\to} 2} f(x)=\frac{1}{0^+}=+\infty$.

- الرسم وخطواته هي :

– نرسم المستقيمين المقاربين .

– نرسم C_f على المجال I بتوجيه من جدول التغيرات.



التمرين30

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\frac{x^2+x-12}{x^2+x+3}$.

1) عين نهايتي f عند $-\infty$ وعند $+\infty$. استنتج أن للمنحني مستقيما مقاربا , عين معادلة له.

2) ادرس تغيرات f على $\mathbb{R}$.

3) برهن أن المستقيم D الذي معادلته $x=-\frac{1}{2}$ محورُ تناظر للمنحني C_f .

4)عين نقط تقاطع المنحني مع محوري الاحداثيات.

5) ارسم C_f في المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.



الحل

1) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$

إذن للمنحني C_f مستقيم مقارب أفقي معادلته : $y=1$.

2) من أجل كل x من $\mathbb{R}$ $f'(x)=\frac{15(2x+1)}{(x-2)^2}$

وإشارته من إشارة $(2x+1)$ وهو ثنائي حد من الدرجة الأولى , جذره $-\frac{1}{2}$ وإليك ملخص إشارته في الجدول الآتي :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x+1$	$-$	0	$+$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	5 ↘	$-\frac{49}{11}$	↗ 5

3) بالإمكان كتابة $f(x)$ على الشكل الآتي : $f(x)=\frac{x(x+1)-12}{x(x+1)+3}$

من أجل $\left(-\frac{1}{2}+h\right)$ من $\mathbb{R}$, لدينا :

$$f\left(-\frac{1}{2}+h\right)=\frac{\left(-\frac{1}{2}+h\right)\left(-\frac{1}{2}+h+1\right)-12}{\left(-\frac{1}{2}+h\right)\left(-\frac{1}{2}+h+1\right)+3}=\frac{\left(h-\frac{1}{2}\right)\left(h+\frac{1}{2}\right)-12}{\left(h-\frac{1}{2}\right)\left(h+\frac{1}{2}\right)+3}...(1)$$

ومن أجل $\left(-\frac{1}{2}-h\right)$ من $\mathbb{R}$, لدينا :

$$f\left(-\frac{1}{2}-h\right)=\frac{\left(-\frac{1}{2}-h\right)\left(-\frac{1}{2}-h+1\right)-12}{\left(-\frac{1}{2}-h\right)\left(-\frac{1}{2}-h+1\right)+3}=\frac{\left(-h-\frac{1}{2}\right)\left(-h+\frac{1}{2}\right)-12}{\left(-h-\frac{1}{2}\right)\left(-h+\frac{1}{2}\right)+3}$$

$$=\frac{\left(h+\frac{1}{2}\right)\left(h-\frac{1}{2}\right)-12}{\left(h+\frac{1}{2}\right)\left(h-\frac{1}{2}\right)+3}...(2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن $f\left(-\frac{1}{2}+h\right)=f\left(-\frac{1}{2}-h\right)$.

وبالتالي المستقيم D الذي معادلته $x=-\frac{1}{2}$ محورُ تناظر للمنحني C_f .

4) فواصل نقط تقاطع C_f مع محور الفواصل هي حلول المعادلة $\frac{x^2+x-12}{x^2+x+3}=0$

في المجموعة $\mathbb{R}$, ومنه $x^2+x-12=0$ ولهذه المعادلة حلان هما : -4 , 3

وبالتالي يتقاطع C_f مع محور الفواصل في نقطتين احداثيا كل منهما $(-4,0)$ و $(3,0)$.

وترتيب نقطة تقاطع C_f مع محور التراتيب هو $f(0)$ وبما أن $f(0)=-4$ فإن

احداثيي نقطة تقاطع C_f مع محور التراتيب هما $(0,-4)$

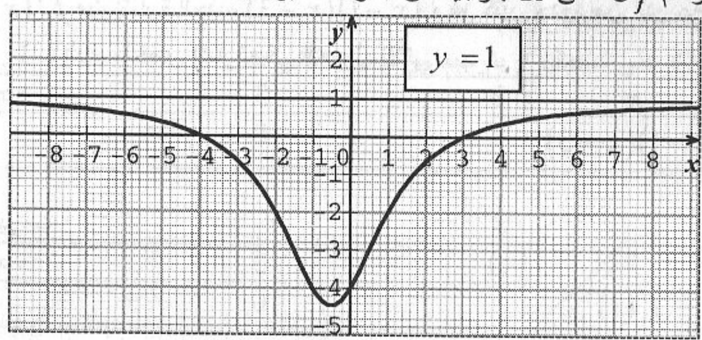
5) رسم C_f وخطواته هي :

– نرسم المستقيم المقارب الوحيد .

– نرسم النقط الخاصة , دون أن ننسى النهاية الحدية الصغرى والتي إحداثياها

$\left(-\frac{1}{2},-\frac{49}{11}\right)$.

– نرسم C_f على $\mathbb{R}$ بتوجيه من جدول التغيرات.



التمرين 31

لتكن f الدالة المعرفة على $I=]1,+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\frac{x^3}{(x-1)^2}$

1) عين نهايتي f عند 1 وعند $+\infty$.

2) ادرس تغيرات f على I .

3) برهن أن المستقيم D الذي معادلته $y=x+2$ مستقيم مقارب للمنحني C_f .

ادرس وضعية C_f بالنسبة إلى المستقيم D على I.

4) برهن أن المعادلة $f(x)=7$ تقبل حلا وحيدا x_0 في $[2,3]$.

❁ عين قيمة مقربة لـ x_0 إلى 0.1 بالزيادة .

5) ارسم C_f في المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

الحل

1) $\lim_{x\xrightarrow[>]{}1} f(x)=\frac{1}{0^+}=+\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$

إذن للمنحني C_f مستقيم مقارب عمودي معادلته : $x=1$.

2) من أجل كل x من $\mathbb{R}$, $f'(x)=\frac{3x^2(x-1)^2-2(x-1)(x^3)}{(x-1)^2}$

وبتحليل البسط يصبح لدينا :

$$f'(x)=\frac{x^2(x-1)\left[3(x-1)-2x\right]}{(x-1)^2}=\frac{x^2(x-1)(x-3)}{(x-1)^2}$$

وإشارة $f'(x)$ من إشارة الجداء $(x-1)(x-3)$ وهو كثير حدود من الدرجة الثانية جذراه 1 , 3 وإليك ملخص إشارته في الجدول الآتي :

x	1		3		$+\infty$
$(x-1)(x-3)$		$-$	0	$+$	

جدول التغيرات :

x	1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{27}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

3) بما أن $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-2}{(x-1)^2}=0$

فإن المستقيم D الذي معادلته $y=x+2$ مستقيم مقارب للمنحني C_f .

لدراسة وضعية C_f بالنسبة إلى D , ندرس إشارة الفرق $f(x)-(x+2)$

نلاحظ أن إشارة الفرق $f(x)-(x+2)=\frac{3x-2}{(x-1)^2}$ من إشارة $(3x-2)$.

ولدينا من أجل كل x من I , $3x-2>0$. وبالتالي يقع C_f **فوق** D.

4) بما أن f مستمرة ومتناقصة تماما على $[2,3]$ و $f(2)=8$ و $f(3)=\frac{27}{4}$

فإن للمعادلة $f(x)=7$ حلا وحيدا x_0 على هذا المجال.

❁ من أجل تعيين قيمة مقربة لـ x_0 إلى 0.1 بالزيادة , نمسح المجال $[2,3]$ بخطوة قدرها 0.1 كالآتي :

x	2	2.1	2.2	2.3	**2.4**	**2.5**	2.6	2.7	2.8	2.9	3
$f(x)$	8.0	7.7	7.4	7.2	**7.1**	**6.9**					

نوقف الحساب بعد 2.5 لأن $f(x)$ تركت 7 وراءها.

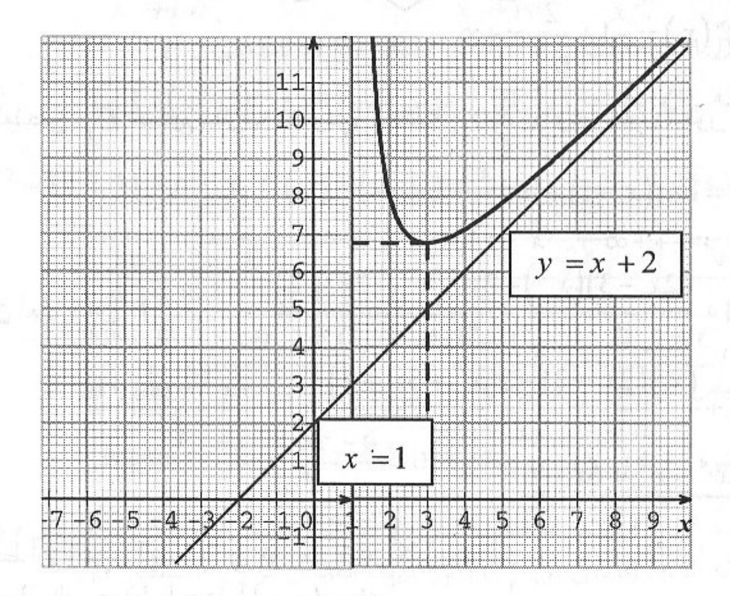
نستنتج من الجدول أن القيمة المقربة لـ x_0 إلى 0.1 بالزيادة هي 2.4 .

5) الرسم وخطواته هي :

– نلاحظ أن C_f يمر بالمبدأ $O(0,0)$, وله نهاية حدية صغرى إحداثياها $\left(3,\frac{27}{4}\right)$

– نرسم المستقيمين المقاربين .

– نرسم C_f على المجال I بتوجيه من جدول التغيرات.



التمرين 32

لتكن f الدالة المعرفة على $I=\left]0,+\infty\right[$ كما يلي :

$$f(x)=x-1+\frac{x^2-3x+2}{x^3}$$

1) ادرس نهايتي f عند 0 وعند $+\infty$.

2) برهن أنه من أجل كل x من I , $f'(x)=\frac{(x-1)(x^3+x^2+6)}{x^4}$

• استنتج تغيرات f على I .

3) برهن أن المستقيم D الذي معادلته $y=x-1$ مستقيم مقارب للمنحني C_f .

ادرس وضعية C_f بالنسبة إلى المستقيم D على I.

4) برهن أنه توجد نقطتان من C_f يكون فيهما المماس موازيا للمستقيم D.

5) برهن أن المعادلة $f(x)=\frac{1}{2}$ تقبل حلا وحيدا x_0 في $[1,2]$.

❁ عين قيمة مقربة لـ x_0 إلى 0.1 بالنقصان.

6) ارسم C_f في المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

الحل

1) $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = -1+\frac{2}{0^+}=+\infty$

إذن للمنحني C_f مستقيم مقارب عمودي معادلته: $x=0$ وهو حامل محور الفواصل.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x-1) + \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^3} = +\infty$$

2) من أجل x من I ، $f'(x)=1+\frac{(2x-3)(x^3)-3x^2(x^2-3x+2)}{x^6}$

$$f'(x)=1+\frac{(x)(2x-3)-3(x^2-3x+2)}{x^4}=1+\frac{-x^2+6x-6}{x^4}$$

$$=\frac{x^4-x^2+6x-6}{x^4}$$

ونلاحظ أن 1 جذر للبسط الذي هو عبارة عن كثير حدود.

إذن يحلل إلى عوامل أحدها $(x-1)$ ومنه

$x^4-x^2+6x-6=(x-1)(x^2+x^2+6)$ وبالتالي

من أجل كل x من I ، $f'(x)=\frac{(x-1)(x^3+x^2+6)}{x^4}$

• استنتاج تغيرات f على I . إن إشارة $f'(x)$ من إشارة $(x-1)$ و ملخص إشارته في الجدول الآتي:

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	

جدول التغيرات:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

3) بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x+2}{x^3}=0$

فإن المستقيم D الذي معادلته $y=x+1$ مستقيم مقارب للمنحني C_f.

لدراسة وضعية C_f بالنسبة إلى D ، ندرس إشارة الفرق $f(x)-(x+1)$

نلاحظ أن إشارة الفرق $f(x)-(x+1)=\frac{x^2-3x+2}{x^2}$ من إشارة (x^2-3x+2).

x	0		1		2		$+\infty$
إشارة الفرق		$+$	0	$-$	0	$+$	
الوضعية		C_f فوق D		C_f أسفل D		C_f فوق D	

4) يكون المماس للمنحني C_f في النقطة التي فاصلتها x_0 موازيا للمستقيم D إذا تحقق ما يلي: $f'(x_0)=1$ وينتج $\frac{-x^2+6x-6}{x^4}=0$ وهذا يكافئ $-x^2+6x-6=0$ ولهذه المعادلة في I حلان هما: $3-\sqrt{3}$, $3+\sqrt{3}$ وهما قيمتا x_0 . ومنه توجد نقطتان من C_f يكون فيهما المماس موازيا للمستقيم D.

5) بما أن f مستمرة ومتزايدة تماما على $]1,2[$ و $f(1)=0$ و $f(2)=1$

فإن المعادلة $f(x)=\frac{1}{2}$ تقبل حلا وحيدا x_0 في $[1,2]$.

❁ من أجل تعيين قيمة مقربة لـ x_0 إلى 0.1 بالنقصان ، نمسح المجال $[1,2]$ بخطوة قدرها 0.1 كالآتي:

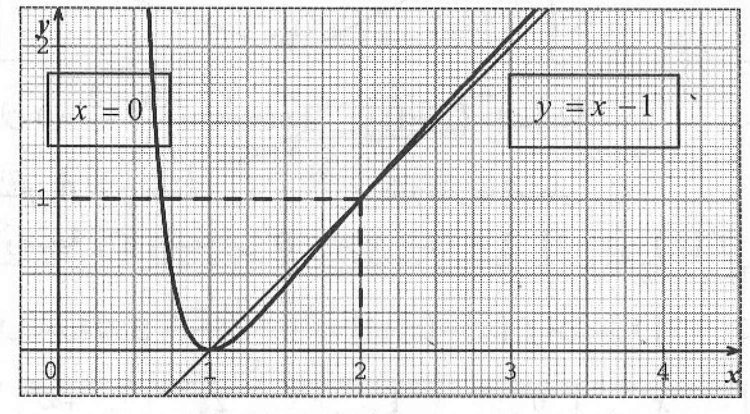
x	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
$f(x)$	0.00	0.03	0.11	0.20	0.31	0.43	0.54				

نوقف الحساب بعد 1.6 لأن $f(x)$ تجاوزت $\frac{1}{2}$.

نستنتج من الجدول أن القيمة المقربة لـ x_0 إلى 0.1 بالنقصان هي 1.5.

6) الرسم وخطواته هي:

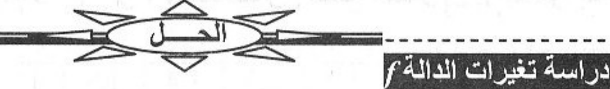
- نلاحظ أن للمنحني C_f نهاية حدية صغرى إحداثياها $(1,0)$
- نرسم المستقيمين المقاربين .
- نرسم C_f على المجال I بتوجيه من جدول التغيرات, مع ملاحظة الوضعية النسبية لكل من C_f و D.



التمرين 33

لتكن f الدالة المعرفة كما يلي : $f(x)=\dfrac{1-2x}{x^2-x-2}$

1) ادرس تغيرات الدالة f.
2) عين إحداثيي كل من A , B نقطتي تقاطع المنحني C_f مع محوري الاحداثيات , ثم اكتب معادلتين لمماسي المنحني C_f في هاتين النقطتين .
3) برهن أن المنحني C_f يقبل نقطة انعطاف Ω , عين احداثييها.
- برهن أن النقطة Ω مركز تناظر المنحني C_f .
4) ارسم C_f في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.



1) دراسة تغيرات الدالة f

مجموعة التعريف تكون الدالة f معرفة إذا وفقط إذا كان $x^2-x-2\neq 0$
أي ($x\neq -1$ و $x\neq 2$)

ومنه مجموعة تعريف f هي : $D_f=]-\infty,-1[\cup]-1,2[\cup]2,+\infty[$

ملاحظة : من المفيد استنتاج إشارة المقام الذي هو كثير حدود من الدرجة الثانية , لاستعمالها أثناء حساب $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

النهايات

$$\lim_{x \underset{<}{\to} -1} f(x)=\frac{3}{0^+}=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{x^2}=0$$

$$\lim_{x \underset{<}{\to} 2} f(x)=\frac{-3}{0^-}=+\infty \quad , \quad \lim_{x \underset{>}{\to} -1} f(x)=\frac{3}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{x^2}=0 \quad , \quad \lim_{x \underset{>}{\to} 2} f(x)=\frac{-3}{0^+}=-\infty$$

الدالة المشتقة

من أجل كل x من D_f , $f'(x)=\dfrac{2x^2-2x+5}{(x^2-x-2)^2}$

وإشارته من إشارة $2x^2-2x+5$ وهو كثير حدود من الدرجة الثانية مميزه سالب تماما
وبالتالي من اجل كل x من D_f , $f'(x)>0$

جدول التغيرات

x	$-\infty$		-1		$+2$		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	+	‖	+	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0

2) نقطتا تقاطع المنحني C_f مع المحورين $A\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ و $B\left(\frac{1}{2},0\right)$

معادلة المماس في النقطة $A\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ هي : $y=\frac{5}{4}x-\frac{1}{2}$

ومعادلة المماس في النقطة $B\left(\frac{1}{2},0\right)$ هي : $y=\frac{8}{9}\left(x-\frac{1}{2}\right)$

3) نقطة الانعطاف Ω من أجل كل x من D_f ,

$$f''(x)=\frac{(4x-2)(x^2-x-2)^2-2(x^2-x-2)(2x-1)(2x^2-2x+5)}{(x^2-x-2)^4}$$

في مثل هذه المواقف, فكر في التحليل **أولا** وإذا لم تتمكن , فلا مناص من النشر .

$$f''(x)=\frac{2(x^2-x-2)(2x-1)\left[(x^2-x-2)-(2x^2-2x+5)\right]}{(x^2-x-2)^4}$$

ومن أجل كل x من D_f , $f''(x)=\dfrac{2(2x-1)(-x^2+x-7)}{(x^2-x-2)^3}$

وملخص إشارة $f''(x)$ في الجدول الآتي :

x	$-\infty$ … -1	-1 … $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ … $+2$	$+2$ … $+\infty$
$2x-1$	−	−	+	+
$-x^2+x-7$	−	−	−	−
x^2-x-2	+	−	−	+
$f''(x)$	+	−	+	−

والخلاصة أن $f''(x)$ تنعدم عند $\frac{1}{2}$ مغيرة إشارتها , وهذا يعني أن المنحني C_f يقبل نقطة انعطاف Ω احداثياها $\left(\frac{1}{2},0\right)$.

النقطة $\Omega\left(\frac{1}{2},0\right)$ مركز تناظر المنحني C_f

من أجل كل $x=\frac{1}{2}+h$ من D_f , العدد $x=\frac{1}{2}-h$ ينتمي إلى D_f .

نحسب $\dfrac{f\left(\frac{1}{2}+h\right)+f\left(\frac{1}{2}-h\right)}{2}$

لدينا $f\left(\frac{1}{2}+h\right)=\dfrac{1-2\left(\frac{1}{2}+h\right)}{\left(\frac{1}{2}+h\right)^2-\left(\frac{1}{2}+h\right)-2}=\dfrac{-2h}{h^2-\frac{9}{4}}$

ولدينا $f\left(\frac{1}{2}-h\right)=\dfrac{1-2\left(\frac{1}{2}-h\right)}{\left(\frac{1}{2}-h\right)^2-\left(\frac{1}{2}-h\right)-2}=\dfrac{2h}{h^2-\frac{9}{4}}$

ينتج أن $\dfrac{f\left(\frac{1}{2}+h\right)+f\left(\frac{1}{2}-h\right)}{2}=0$.

نستنتج أن النقطة $\Omega\left(\frac{1}{2},0\right)$ مركز تناظر المنحني C_f.

4) رسم المنحني C_f

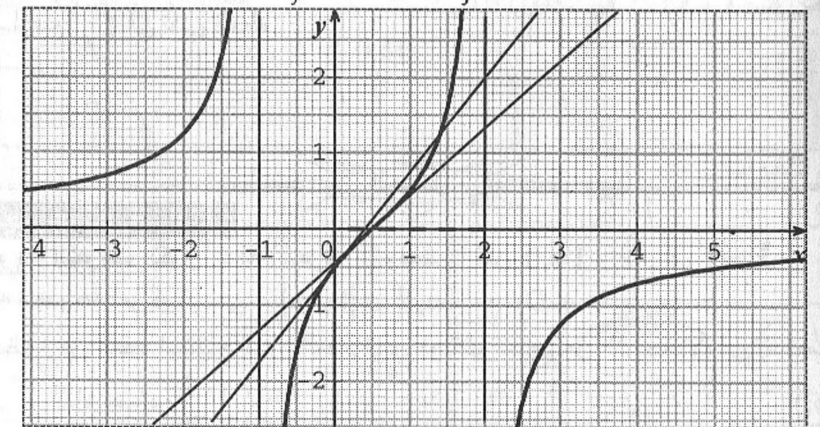
– يقبل للمنحني C_f ثلاثة مستقيمات مقاربة أحدها أفقي معادلته : $y=0$ و الآخران عموديان معادلتاهما : $x=-1$ و $x=2$.

– الرسم وخطواته هي :

❁ نرسم المستقيمات المقاربة الثلاثة .

❁ نرسم النقطتين $A\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ و $B\left(\frac{1}{2},0\right)$

❁ نرسم C_f على المجال D_f بتوجيه من جدول التغيرات.



لاحظ وضعية المنحني C_f بالنسبة إلى المماس في نقطة الانعطاف .

ونعبر عن هذا بقولنا :" يخترق المنحني C_f مماسه في نقطة الانعطاف"



لتكن f الدالة المعرفة كما يلي : $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x-1}$

1) عين D_f مجموعة تعريف الدالة f.

2) برهن أنه يمكن وضع $f(x)$ على الشكل الآتي : $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$.

حيث c , b , a أعداد حقيقية يطلب تعيينها .

3) ادرس تغيرات الدالة f.

4) برهن أن للمنحني C_f مستقيمين مقاربين أحدهما D مائل و الآخر عمودي.

– أعط معادلتيهما .

– ادرس وضعية المنحني C_f بالنسبة إلى المقارب المائل D .

5) ارسم C_f في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

6) برهن أن C_f يقبل مركز تناظر .

7) عين , تبعا للوسيط m , عدد حلول المعادلة الآتية : $x^2-(m-1)x+m=0$.

ثم عين النتائج باستعمال المنحني C_f .

8) ليكن C_g المنحني الممثل للدالة g المعرفة كما يلي : $g(x)=\dfrac{|x(x+1)|}{x-1}$

– كيف يمكن استنتاج C_g باستعمال C_f ؟

– ارسم C_g في نفس المعلم .

الحل

1) مجموعة تعريف الدالة f

مجموعة التعريف تكون الدالة f معرفة إذا وقفط إذا كان $x-1\neq 0$, أي $x\neq 1$

ومنه مجموعة تعريف f هي : $D_f=]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$

ملاحظة : من المفيد استنتاج إشارة المقام الذي هو كثير حدود من الدرجة الأولى,لاستعمالها أثناء حساب $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

2) الشكل الجديد لـ $f(x)$

من أجل كل x من D_f , $ax+b+\dfrac{c}{x-1}=\dfrac{ax^2+(b-a)x-b+c}{x-1}$

وبالمطابقة مع $f(x)$ نجد $\begin{cases}a=1\\ b-1=1\\ -b+c=0\end{cases}$ وبالتالي $\begin{cases}a=1\\ b=2\\ c=2\end{cases}$

ويكون لدينا $f(x)=x+2+\dfrac{2}{x-1}$.

3) دراسة تغيرات الدالة f

النهايات $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x}=-\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)=\dfrac{2}{0^-}=-\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)=\dfrac{2}{0^+}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x}=+\infty$

الدالة المشتقة لاحظ أن لعبارة الدالة شكلين فاختر أنسبهما لحساب الدالة المشتقة

من أجل كل x من D_f, $f'(x)=1+\dfrac{-2}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$

وإشارة $f'(x)$ من إشارة x^2-2x-1 وهو كثير حدود من الدرجة الثانية له جذران هما : $1-\sqrt{2}\approx-0.41$, $1+\sqrt{2}\approx 2.41$.

وملخص إشارة $f'(x)$ في الجدول الآتي :

X	$-\infty$	-0.41		$+1$		2.41		$+\infty$
x^2-2x-1	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

جدول التغيرات

x	$-\infty$		-0.41		$+1$		2.41		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0.17	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	5.84	↘	$-\infty$

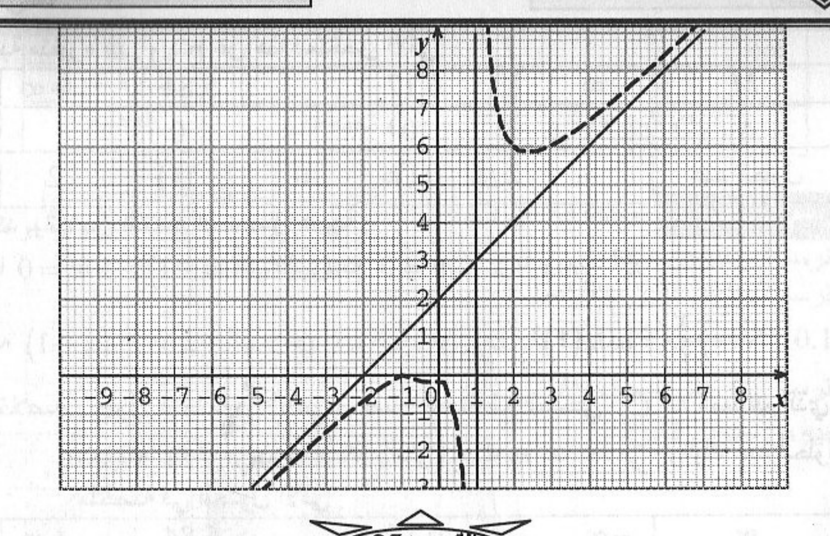
4) البحث عن المستقيمين المقاربين ودراسة الوضعية النسبية

بما أن $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\pm\infty$ فإن المستقيم الذي معادلته $x=1$ مستقيم مقارب عمودي

وبما أن $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2}{x-1}=0$

فإن المستقيم D الذي معادلته $y=x+1$ مستقيم مقارب مائل للمنحني C_f .

لدراسة وضعية C_f بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل D, ندرس إشارة الفرق $f(x)-(x+2)$, نلاحظ أن إشارته من إشارة $\dfrac{2}{x-1}$ وإشارة هذا الكسر من إشارة ثنائي الحد $x-1$ وملخص الناتج في الجدول الآتي :



التمرين35

لتكن f الدالة المعرفة كما يلي : $f(x)=\dfrac{|x^2-3x|}{x+1}$

1) عين D_f مجموعة تعريف الدالة f.

– قسم المجموعة D_f إلى مجالين بحيث في كل منهما تكتب $f(x)$ بدون القيمة المطلقة.

– عين في كل حالة من الحالتين السابقتين , أعدادا حقيقية a , b , c بحيث

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}$$

2) أ– احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow[>]{} 0} \dfrac{f(x)}{x}$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow[<]{} 0} \dfrac{f(x)}{x}$. هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0؟

ب– احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow[>]{} 3} \dfrac{f(x)}{x-3}$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow[<]{} 3} \dfrac{f(x)}{x-3}$. هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند 3؟

3) ادرس تغيرات الدالة f.

4) ليكن C_f المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$, الوحدة $1cm$

استنتج من السؤالين : 1) و2).

- المستقيم الذي معادلته $y=x-4$ مقارب للمنحني C_f .
- يقبل المنحني C_f نصفي مماسين في النقطة ذات الفاصلة 0 .
- يقبل المنحني C_f نصفي مماسين في النقطة ذات الفاصلة 3 .

5) ارسم C_f

6) ناقش بيانيا , تبعا للوسيط m , عدد حلول المعادلة الآتية :

$|x^2-3x|=m(x+1)$. حل المعادلة في حالة $m=1$.

الحل

1) مجموعة تعريف الدالة f

مجموعة التعريف : تكون الدالة f معرفة إذا وفقط إذا كان $x+1\neq 0$, أي $x\neq -1$

ومنه مجموعة تعريف f هي : $D_f=]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$

$f(x)$ بدون قيمة مطلقة : بعد دراسة إشارة x^2-3x نكتب عبارة $f(x)$ بدون القيمة المطلقة كما في الجدول الآتي :

x	$-\infty$ ... -1	-1 ... 0	0 ... 3	3 ... $+\infty$
$x(x-3)$	+	+	0 − 0	+
$f(x)$	$\dfrac{x^2-3x}{x+1}$	$\dfrac{x^2-3x}{x+1}$	$\dfrac{-x^2+3x}{x+1}$	$\dfrac{x^2-3x}{x+1}$

إذن

من أجل كل x من المجال $]-\infty,-1[\cup]-1,0]\cup[3,+\infty[$, $f(x)=x-4+\dfrac{4}{x+1}$

ومن أجل كل x من المجال $[0,3]$, $f(x)=-x+4-\dfrac{4}{x+1}$

2) حساب النهايتين $\lim\limits_{x \xrightarrow[>]{} 0} \dfrac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x \xrightarrow[<]{} 0} \dfrac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x \xrightarrow[>]{} 0} \frac{f(x)}{x}=\lim_{x \xrightarrow[>]{} 0} \frac{-x(x-3)}{x(x+1)}=\lim_{x \xrightarrow[>]{} 0} \frac{-(x-3)}{x+1}=3$$

إذن الدالة f تقبل الاشتقاق عند 0 من اليمين و العدد المشتق للدالة f عند 0 من اليمين هو 3 .

$$\lim_{x \xrightarrow[<]{} 0} \frac{f(x)}{x}=\lim_{x \xrightarrow[<]{} 0} \frac{x(x-3)}{x(x+1)}=\lim_{x \xrightarrow[<]{} 0} \frac{x-3}{x+1}=-3$$

إذن الدالة f تقبل الاشتقاق عند 0 من اليسار والعدد المشتق للدالة f عند 0 من اليسار هو-3 .

والخلاصة, بما أن العدد المشتق للدالة f عند 0 من اليمين **لا يساوي** العدد المشتق للدالة f من اليسار عند 0 فإن الدالة لا تقبل الاشتقاق عند 0 .

$$\lim_{x \xrightarrow[>]{} 3} \frac{f(x)}{x-3}=\lim_{x \xrightarrow[>]{} 3} \frac{x(x-3)}{(x-3)(x+1)}=\lim_{x \xrightarrow[>]{} 3} \frac{x}{x+1}=\frac{3}{4}$$

إذن الدالة f تقبل الاشتقاق عند 3 من اليمين و العدد المشتق للدالة f عند 3 من اليمين هو $\dfrac{3}{4}$.

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 3} \frac{f(x)}{x-3} = \lim_{x \xrightarrow{<} 3} \frac{-x(x-3)}{(x-3)(x+1)} = \lim_{x \xrightarrow{<} 3} \frac{-x}{x+1} = -\frac{3}{4}$$

إذن الدالة f تقبل الاشتقاق عند 3 من اليسار و العدد المشتق للدالة f عند 3من اليسار هو $-\frac{3}{4}$

والخلاصة, بما أن العدد المشتق للدالة f عند 3 من اليمين **لا يساوي** العدد المشتق للدالة f من اليسار عند 3 فإن الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند 3 .

3) دراسة تغيرات الدالة f

النهايات

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-3}{x+1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} -1} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{x^2-3x}{x+1} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} -1} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} -1} \frac{x^2-3x}{x+1} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-3}{x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x} = +\infty$$

الدالة المشتقة لاحظ أن لعبارة الدالة شكلين فاختر أنسبهما لحساب الدالة المشتقة

من أجل كل x من $]-\infty,-1[\cup]-1,0] \cup [3,+\infty[$

$$f'(x) = 1 + \frac{-4}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$$

وإشارة $f'(x)$, في هذه الحالة , من إشارة x^2+2x-3 وهو كثير حدود من الدرجة الثانية له جذران هما : 1 , -3 .

و من أجل كل x من $[0,3]$,

$$f'(x) = -1 + \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{-x^2-2x+3}{(x+1)^2}$$

وإشارة $f'(x)$, في هذه الحالة , من إشارة $-x^2-2x+3$ وهو كثير حدود من الدرجة الثانية له جذران هما : 1 , -3 .

وملخص إشارة $f'(x)$ في الجدول الآتي :

x	$-\infty$		-3		-1		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−		+	0	−		+	

جدول التغيرات

x	$-\infty$		-3		-1		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−		+	0	−		+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-9	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$

4)الاستنتاج

- بما أن $\lim_{x \to \pm\infty} [f(x)-(x-4)] = \lim_{x \to -\infty} \frac{4}{x+1} = 0$ فإن المستقيم الذي معادلته $y = x-4$ مستقيم مقارب للمنحني C_f .

ومن المفيد: ملاحظة أن المنحني C_f يقبل مستقيما مقاربا آخر عموديا معادلته $x = -1$.

- بما أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0 على اليمين , فإن المنحني C_f يقبل نصف مماس من اليمين معامل توجيهه 3.

وبما أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0 على اليسار, فإن المنحني C_f يقبل نصف مماس من اليسار معامل توجيهه -3.

والخلاصة : يقبل المنحني C_f نصفي مماسين في النقطة ذات الفاصلة 0 .

- بما أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند 3 على اليمين , فإن المنحني C_f يقبل نصف مماس من اليمين معامل توجيهه $\frac{3}{4}$.

وبما أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند 3 على اليسار, فإن المنحني C_f يقبل نصف مماس من اليسار معامل توجيهه $-\frac{3}{4}$.

والخلاصة : يقبل المنحني C_f نصفي مماسين في النقطة ذات الفاصلة 3 .

5) رسم C_f وخطواته هي :

- نرسم المستقيمين المقاربين .
- نرسم النقط التي إحداثياتها: $(-3,-9)$ و $(0,0)$ و $(1,1)$ و $(3,0)$ (بملاحظة جدول التغيرات)
- نرسم C_f على المجال D_f بتوجيه من جدول التغيرات.

7) تعيين عدد حلول المعادلة الآتية : $|x^2-3x| = m(x+1)$.

لدينا $|x^2-3x| = m(x+1)$ ومن أجل $x \neq -1$, نجد $\frac{|x^2-3x|}{x+1} = m$

ومنه حلول هذه المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحني C_f مع المستقيم الذي معادلته $y=m$ (وهو مستقيم أفقي) حيث m عدد حقيقي . وإليك عدد الحلول ملخصة في الجدول الآتي :

m	$-\infty$		-9		0		1		$+\infty$
عدد الحلول		2	(1)	0	(2)	4	(3)	2	

حل المعادلة في حالة $m=1$

لنحل المعادلة $f(x)=1$ على $D_f =]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$

حسب النتائج السابقة لدينا

من أجل كل x من المجال $]-\infty,-1[\cup]-1,0]\cup[3,+\infty[$, $\frac{x^2-3x}{x+1}=1$

وبالتالي نحصل على المعادلة : $x^2-4x-1=0$ ولهذه المعادلة حلان هما $2-\sqrt{5}\approx -0.23$, $2+\sqrt{5}\approx 4.23$ وهما حلان مقبولان.

ومن أجل كل x من المجال $[0,3]$, $\frac{-x^2+3x}{x+1}=1$

وبالتالي نحصل على المعادلة : $x^2-2x+1=0$ ولهذه المعادلة حل مضاعف هو 1 وهو حل مقبول .

والخلاصة أن للمعادلة $|x^2-3x| = x+1$ (في حالة $m=1$) ثلاثة حلول هي :

$2-\sqrt{5}\approx-0.23$, 1 , $2+\sqrt{5}\approx4.23$.



لتكن f الدالة المعرفة كما يلي : $f(x)=\frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}$

1) عين D_f مجموعة تعريف الدالة f.

2) برهن أنه يمكن وضع $f(x)$ على الشكل الآتي : $f(x)=ax+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}$

حيث a , b , c أعداد حقيقية يطلب تعيينها .

3) تحقق من أنه من كل عدد x من D_f , $f'(x)=\frac{x(x^2-3x+4)}{(x-1)^3}$

❁ ادرس تغيرات الدالة f.

4) برهن أن المستقيم D الذي معادلته $y=x$ مستقيم مقارب للمنحني C_f الممثل للدالة f

❁ ادرس وضعية المنحني C_f بالنسبة إلى المقارب المائل D.

5) ارسم C_f في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

6) باستعمال المنحني C_f , ناقش عدد الحلول – في $\mathbb{R}$ – للمعادلة :

$$x^3-(2+m)x^2+2mx-m=0$$

حيث m وسيط حقيقي.

الحــل

1) مجموعة تعريف الدالة f

مجموعة التعريف : تكون الدالة f معرفة إذا وفقط إذا كان $x-1\neq 0$, أي $x\neq 1$

ومنه مجموعة تعريف f هي : $D_f=]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$

2) الشكل الجديد لـ $f(x)$

من أجل كل x من D_f ,

$$ax+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}=\frac{ax(x^2-2x+1)+b(x-1)+c}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{ax^3-2ax^2+(a+b)x-b+c}{(x-1)^2}$$

وبالمطابقة مع $f(x)$ نجد $\begin{cases} a=1 \\ -2a=-2 \\ a+b=0 \\ -b+c=0 \end{cases}$ وبالتالي $\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=-1 \end{cases}$

ويكون لدينا $f(x)=x-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}$.

3) الدالة المشتقة للدالة f

من أجل كل x من $D_f=]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$

$$f'(x)=1+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{(x-1)^4+(x-1)^2+2(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$=\frac{(x-1)^3+(x-1)+2}{(x-1)^3}=\frac{x(x^2-3x+4)}{(x-1)^3}$$

دراسة تغيرات الدالة f.

النهايات

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2}=-\infty$$

$$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

بما أن المقام موجب تماما يكفي أن نحسب $\lim_{x\to1} f(x)$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}=+\infty$$

إشارة مشتقة الدالة f :

نلاحظ أنه من أجل كل x من $D_f=]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$, $x^2-3x+4>0$

وبالتالي إشارة $f'(x)$ من إشارة الجداء $x(x-1)$, وإليك ملخصا لإشارتها :

x	$-\infty$	0		$+1$		$+\infty$
$x(x-1)$	$+$	0	$-$	‖	$+$	

جدول التغيرات

x	$-\infty$		0		$+1$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

4) المستقيم D الذي معادلته $y=x$ مستقيم مقارب للمنحني

بما أن $\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{-1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}\right]=0$ فإن المستقيم D الذي معادلته $y=x$ مستقيم مقارب للمنحني C_f .

ومن المفيد استنتاج أن المستقيم ذا المعادلة $x=1$ مقارب , أيضا, للمنحني C_f لأن $\lim_{x\to1} f(x)=-\infty$.

دراسة وضعية المنحني C_f بالنسبة إلى المقارب المائل D .

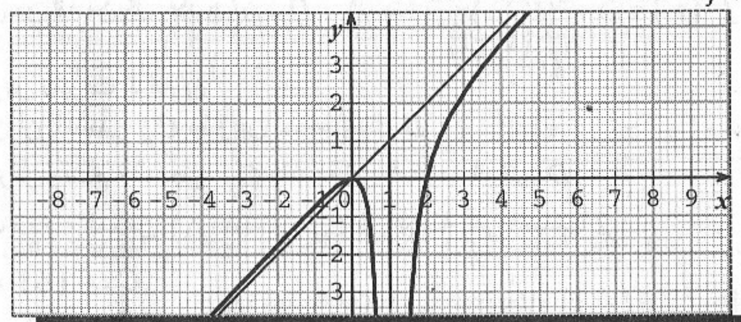
لدراسة وضعية C_f بالنسبة إلى D , ندرس إشارة الفرق $f(x)-x$

نلاحظ أن إشارة الفرق $f(x)-x=\frac{-x}{(x-1)^2}$ من إشارة $(-x)$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
إشارة الفرق		$+$	0	$-$	
الوضعية		C_f فوق D		C_f تحت D	

5) رسم C_f وخطواته هي :

- نرسم المستقيمين المقاربين .
- نرسم النقطة التي إحداثياتها: $(0,0)$ (بملاحظة جدول التغيرات) و $(2,0)$.
- نرسم C_f بتوجيه من جدول التغيرات.



7) تعيين عدد حلول المعادلة الآتية : $x^3-(2+m)x^2+2mx-m=0$.

لدينا $x^3-(2+m)x^2+2mx-m=0$ ومنه $x^3-2x^2=m(x^2-2x+1)$

وبالتالي من أجل كل x من D_f , $\frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}=m$

والخلاصة : حلول هذه المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحني C_f مع المستقيم الذي معادلته $y=m$ (وهو مستقيم أفقي) حيث m عدد حقيقي . وإليك عدد الحلول ملخصة في الجدول الآتي :

m	$-\infty$		0		$+\infty$
عدد الحلول		1	(2)	3	

التمرين 37

لتكن f الدالة المعرفة كما يلي : $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2+2x-4}{(x-1)^2}$

وليكن C_f المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) عين D_f مجموعة تعريف الدالة f.

2) برهن أنه يمكن وضع $f(x)$ على الشكل الآتي : $f(x)=ax+\dfrac{b}{x-1}+\dfrac{c}{(x-1)^2}$

حيث a , b , c أعداد حقيقية يطلب تعيينها .

3) تحقق من أنه من كل عدد x من D_f , $f'(x)=\dfrac{(x^2-1)(x^2-4x+6)}{(x-1)^4}$

- ادرس تغيرات الدالة f.

4) برهن أن للمنحني C_f مقاربين أحدهما مائل D .

- ادرس وضعية المنحني C_f بالنسبة إلى المقارب المائل D.

5) اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني C_f في النقطة التي فاصلتها 2 .

6) ارسم (Δ) ثم C_f.

7) باستعمال المنحني C_f , اشرح كيف يمكن رسم C_g المنحني الممثل للدالة g المعرفة كما يلي : $g(x)=\dfrac{|x-2|(x^2+2)}{(x-1)^2}$. ارسم C_g في نفس المعلم .

الحل

1) مجموعة تعريف الدالة f

مجموعة التعريف : تكون الدالة f معرفة إذا وفقط إذا كان $(x-1)\neq 0$, أي $x\neq 1$

ومنه مجموعة تعريف f هي : $D_f=]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$

2) الشكل الجديد لـ $f(x)$

من أجل كل x من D_f ,

$$ax+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}=\frac{ax(x^2-2x+1)+b(x-1)+c}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{ax^3-2ax^2+(a+b)x-b+c}{(x-1)^2}$$

وبالمطابقة مع $f(x)$ نجد: $\begin{cases}a=1\\-2a=-2\\a+b=2\\-b+c=-4\end{cases}$ وبالتالي $\begin{cases}a=1\\b=1\\c=-3\end{cases}$

ويكون لدينا $f(x)=x+\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{(x-1)^2}$.

3) الدالة المشتقة للدالة f

من أجل كل x من $D_f=]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$

$$f'(x)=1-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{6(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{(x-1)^4-(x-1)^2+6(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$=\frac{(x-1)\left[(x-1)^3-(x-1)+6\right]}{(x-1)^4}=\frac{(x-1)(x^3-3x^2+2x+6)}{(x-1)^4}$$

نلاحظ أن -1 جذر لكثير الحدود (x^3-3x^2+2x+6) وبالتالي فهو يكتب على الشكل $(x+1)(x^2-4x+6)$ وبتعويضه في العلاقة السابقة نجد :

$$f'(x)=\frac{(x^2-1)(x^2-4x+6)}{(x-1)^4}$$

دراسة تغيرات الدالة f.

النهايات

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-2x^2+2x-4}{(x-1)^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

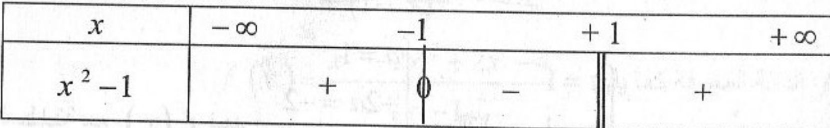
بما أن المقام موجب تماما يكفي أن نحسب $\lim_{x\to 1}f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-2x^2+2x-4}{(x-1)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}=+\infty$$

إشارة مشتقة الدالة f :

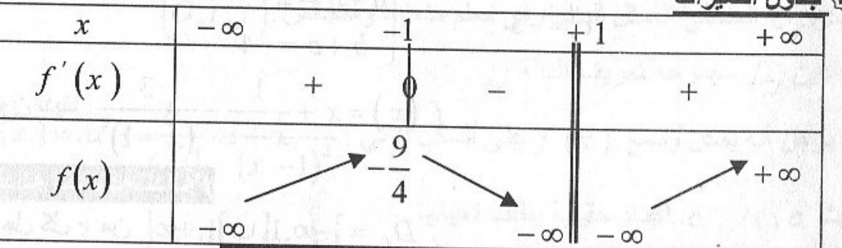
نلاحظ أنه من أجل كل x من $D_f=]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$, $x^2-4x+6>0$

وبالتالي إشارة $f'(x)$ من إشارة x^2-1 , وإليك ملخصا لإشارته :



x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
x^2-1		+	0	−	‖	+	

جدول التغيرات



x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-\frac{9}{4}$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

4) المستقيم D الذي معادلته $y=x$ مستقيم مقارب للمنحني

بما أن $\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{1}{x-1}-\frac{3}{(x-1)^2}\right]=0$ فإن المستقيم D الذي معادلته $y=x$ مستقيم مقارب للمنحني C_f .

وبما أن $\lim_{x\to1^{\cdot}} f(x)=-\infty$ فإن المستقيم الذي معادلته $x=1$ مقارب للمنحني C_f .

دراسة وضعية المنحني C_f بالنسبة إلى المقارب المائل D .

لدراسة وضعية C_f بالنسبة إلى D , ندرس إشارة الفرق $f(x)-x$

نلاحظ أن إشارة الفرق $f(x)-x=\frac{x-4}{(x-1)^2}$ من إشارة $(x-4)$.

x	$-\infty$	4	$+\infty$
إشارة الفرق	−	0	+
الوضعية	C_f تحت D		C_f فوق D

5) كتابة معادلة المماس (Δ) للمنحني C_f في النقطة التي فاصلتها 2 .

تذكر أن الشكل العام لمعادلة المماس لمنحن في نقطة منه فاصلتها a هو :

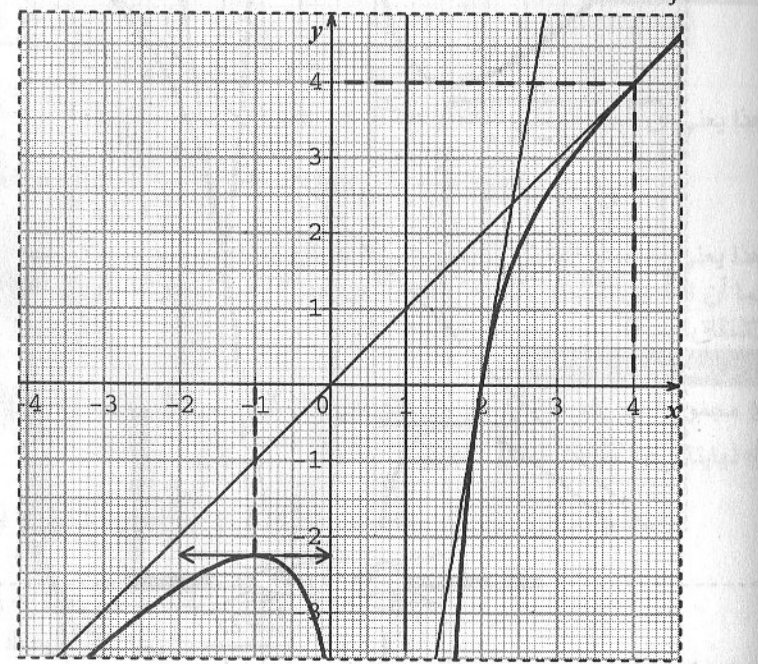
$y=f'(a)(x-a)+f(a)$ ومنه معادلة مماسنا هي $y=f'(2)(x-2)+f(2)$

وبالتعويض نجد $y=6x-12$.

6) رسم (Δ) و C_f وخطواته هي :

- نرسم المماس (Δ) باختيار نقطتين أو ثلاث , وهو الأفضل , منه.
- نرسم المستقيمين المقاربين .

- نرسم النقطة التي إحداثياتها: $\left(-1,-\frac{9}{4}\right)$ (بملاحظة جدول التغيرات) و $(0,-4)$.
- نرسم C_f بتوجيه من جدول التغيرات, والتقيد بنتائج دراسة الوضعية النسبية .



7) رسم C_g

- لنكتب العبارة $f(x)$ بدون القيمة المطلقة كما يلي :

من أجل كل x من المجال $]-\infty,1[\cup]1,2]$, $g(x)=-\frac{(x-2)(x^2+2)}{(x-1)^2}$

وينتج أن $g(x)=-f(x)$ وبالتالي C_g يناظر C_f بالنسبة إلى محور الفواصل .

و من أجل كل x من المجال $[2,+\infty[$, $g(x)=-\frac{(x-2)(x^2+2)}{(x-1)^2}=f(x)$

وينتج أن C_g ينطبق على C_f .

- لنرسم C_g في المعلم السابق.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

3) للمنحني C_f مستقيمان مقاربان

بما أن $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-x+1)\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{-x+1}=0$ فإن المستقيم الذي معادلته $y=x-4$ مستقيم مقارب للمنحني C_f .

بما أن $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-3)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x+1}=0$ فإن المستقيم الذي معادلته $y=x-4$ مستقيم مقارب للمنحني C_f .

من أجل كل $x\ge 0$ ، $f(x)-(x-3)=\frac{3}{x+1}$

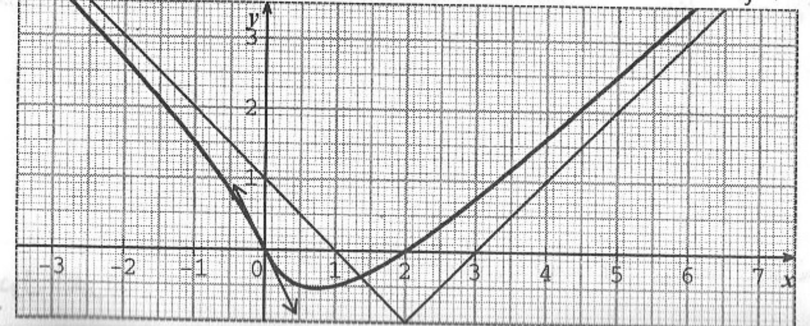
ونلاحظ أنه من أجل $x\ge 0$ ، $f(x)-(x-3)>0$ ، وتفسير هذه النتيجة هندسيا هو أن المنحني C_f يقع فوق المستقيم المقارب D ذي المعادلة $y=x-3$.

من أجل كل $x\le 0$ ، $f(x)-(1-x)=\frac{-1}{-x+1}=\frac{1}{x-1}$

ونلاحظ أنه من أجل $x\le 0$ ، $f(x)-(1-x)<0$ ، وتفسير هذه النتيجة هندسيا هو أن المنحني C_f يقع تحت المستقيم المقارب D' الذي معادلته $y=-x+1$.

4) رسم C_f وخطواته هي :

- نرسم المستقيمين المقاربين .
- نرسم النقط التي إحداثياتها: $(0,0)$ (بملاحظة جدول التغيرات) و $(2,0)$
- نرسم C_f على المجال $\mathbb{R}$ بتوجيه من جدول التغيرات.



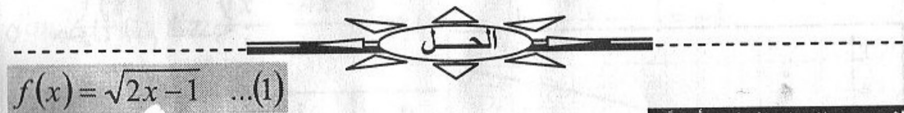
بما أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند 0 فإن المنحني C_f يقبل مماسا في النقطة ذات الفاصلة 0 معامل توجيهه 2− .



ادرس اتجاه تغير الدوال الآتية ثم ارسم المنحنيات الممثلة لها في معلم متعامد ومتجانس.

$f(x)=\sqrt{2x-1}$ ...(1) ، $f(x)=\sqrt{-3x+5}$ ...(2)

$f(x)=\sqrt{x^2-4x+3}$ ...(3) ، $f(x)=\sqrt{-2x^2+3x-1}$ ...(4)



$f(x)=\sqrt{2x-1}$ ...(1)

لندرس اتجاه التغير أولاً :

أ) مجموعة التعريف : الدالة f معرفة على المجال $\left[+\frac{1}{2},+\infty\right[$

ب) حساب النهايات : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ج) الدالة المشتقة :

من أجل كل x من $\left]+\frac{1}{2},+\infty\right[$ $f'(x)=\frac{2}{2\sqrt{2x-1}}$ وإشارته موجبة.

د) جدول التغيرات :

x	$+\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	0 ↗	$+\infty$

ثم نرسم المنحني الممثل للدالة f :

◊ المعلم المختار متعامد ومتجانس.

◊ دراسة الفروع اللانهائية :

في جوار $+\infty$

(أ) نحسب

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x-1}}{x}=\frac{+\infty}{+\infty}\ ?$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x\sqrt{2x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{2x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{\sqrt{2x-1}}=0$$

وبما أن $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ فإن المنحني يقبل **فرعا من قطع مكافئ في اتجاه** $(x'x)$

◊ جدول القيم العددية :

x	$+\frac{1}{2}$	$+1$	$+2$	$+3$
$f(x)$	0	$+1$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$

$f(x)=\sqrt{x^2-4x+3}$ ...(3)

ندرس اتجاه التغير أولا :

(أ) مجموعة التعريف : الدالة f معرفة على المجال $]-\infty,+1]\cup[+3,+\infty[$

(ب) حساب النهايات : $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

(جـ) الدالة المشتقة : من أجل كل x من $]-\infty,+1[\cup]+3,+\infty[$

$$f'(x)=\frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+3}}=\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}}$$

وإشارة الدالة المشتقة من إشارة $(x-2)$ وبالتالي تكون إشارتها سالبة على $]-\infty,+1[$.
وتكون موجبة على المجال $]+3,+\infty[$.

(د) جدول التغيرات :

x	$-\infty$		$+1$		$+3$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		//////		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	//////	0	↗	$+\infty$

ثم نرسم المنحني الممثل للدالة f :

◊ المعلم المختار متعامد ومتجانس.

◊ دراسة الفروع اللانهائية :

في جوار $-\infty$

(أ) نحسب

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)=-1$$

(ب) نحسب

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)+x]=\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2-4x+3}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{+4x-3}{x-\sqrt{x^2-4x+3}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(4-\frac{3}{x}\right)}{x\left(1+\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)}=\frac{+4}{+1+1}=+2$$

(جـ) يقبل المنحني مستقيما مقاربا معادلته $y=-x+2$

في جوار $+\infty$

(أ) نحسب

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(+\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)=+1$$

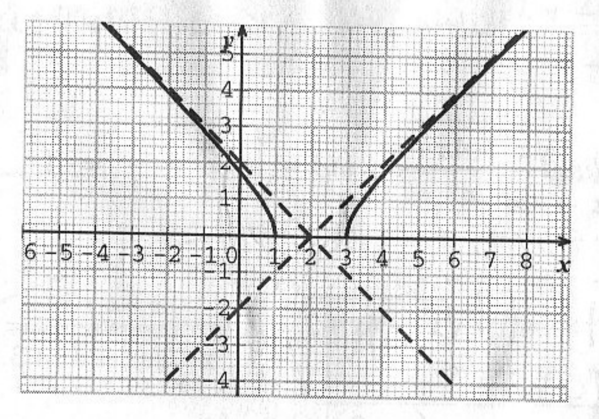
(ب) نحسب

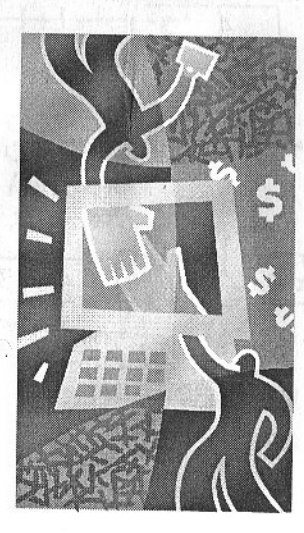
$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to+\infty}\left(-x+\sqrt{x^2-4x+3}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{+4x-3}{-x-\sqrt{x^2-4x+3}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(4 - \frac{3}{x}\right)}{x\left(-1 - \sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}}\right)} = \frac{+4}{-1-1} = -2$$

(جـ) يقبل المنحني مستقيما مقاربا معادلته $y = x - 2$

◊ جدول القيم العددية : نكتفي بما في جدول التغيرات.





الدوال الأصلية

✿ تكون F دالة أصلية للدالة f على مجال I إذا كانت F قابلة للاشتقاق على I وكان من أجل كل x من I , $F'(x) = f(x)$.

✿ إذا كانت F_0 دالة أصلية للدالة f على مجال I , فإن كل الدوال الأصلية للدالة f على هذا المجال تكتب على الشكل الآتي : $F(x) = F_0(x) + C$, حيث C ثابت حقيقي

✿ كل دالة مستمرة على مجال I , تقبل دوالا أصلية على هذا المجال.

مثـــــال : لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = -3x^2$.

- بما أن الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$, فهي تقبل دوالا أصلية على $\mathbb{R}$.
- إحدى هذه الدوال, الدالة F المعرفة كما يلي :

$F(x) = -x^3$ (لأن من أجل كل x من $\mathbb{R}$, $F'(x) = f(x)$)

- الدوال الأصلية للدالة f هي الدوال F المعرفة كما يلي :

$F(x) = -x^3 + C$, حيث C ثابت حقيقي.

ملاحظة : يمكن تعيين إحدى هذه الدوال الأصلية بإعطاء شرط إضافي , ففي هذا المثال , الدالة الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ و التي تنعدم من أجل $x = 1$, هي الدالة F المعرفة كما يلي: $F(x) = -x^3 + 1$.(لاحظ أن $C = 1$ ونتج هذا عن حل المعادلة $F(1) = 0$)

الدوال الأصلية للدوال المألوفة :

I	الدوال الأصلية على I	f معرفة كما يلي:
$\mathbb{R}$	$F(x) = ax + C$	$f(x) = a$
$\mathbb{R}$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{N})$
$\mathbb{R} - \{0\}$	$F(x) = \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + C$	$f(x) = \frac{1}{x^n} \quad (n \in \mathbb{N}; n > 1)$
$]0, +\infty[$	$F(x) = 2\sqrt{x} + C$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$
$\mathbb{R}$	$F(x) = \sin x + C$	$f(x) = \cos x$
$\mathbb{R}$	$F(x) = -\cos x + C$	$f(x) = \sin x$

القواعد العامة للدوال الأصلية :

$f(x)$	$F(x)$	أمثلة
$aU'(x)+bV'(x)$	$aU(x)+bV(x)$	$f(x)=3x^2+2x+1$ $F(x)=x^3+x^2+x+C$
$U'(x).[U(x)]^n$ $(n\in\mathbb{N})$	$\dfrac{[U(x)]^{n+1}}{n+1}+C$	$f(x)=3(3x+1)^2$ $F(x)=\dfrac{(3x+1)^3}{3}+C$
$\dfrac{U'(x)}{[U(x)]^n}$ $(n\in\mathbb{N})$ $(n>1, U(x)\neq 0)$	$\dfrac{-1}{(n-1)[U(x)]^{n-1}}+C$	$f(x)=\dfrac{3x^2}{(x^3+1)^2}$ $F(x)=\dfrac{-1}{x^3+1}+C$
$\dfrac{U'(x)}{\sqrt{U(x)}}$ $(U(x)>0)$	$2\sqrt{U(x)}+C$	$f(x)=\dfrac{3}{\sqrt{3x+2}}$ $F(x)=2\sqrt{3x+2}+C$

التمرين 40

عين الدوال الأصلية للدالة f على المجال I في الحالات الآتية :

1) $I=\mathbb{R}$, $f(x)=3x-4$

2) $I=\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2-3x+1$

3) $I=\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-2x^2+x+\dfrac{1}{3}$

4) $I=\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)^2$

5) $I=]0,+\infty[$, $f(x)=-\dfrac{2}{x^2}$

6) $I=]0,+\infty[$, $f(x)=1-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{x^4}$

7) $I=]0,+\infty[$, $f(x)=\dfrac{3}{\sqrt{x}}$

8) $I=\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$

9) $I=]3,+\infty[$, $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}$

10) $I=\mathbb{R}$, $f(x)=2(2x-1)^3$

11) $I=\mathbb{R}$, $f(x)=(x+1)(x^2+2x+3)$

12) $I=\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{2x^2+1}}$

13) $I=]3,+\infty[$, $f(x)=-\dfrac{1}{(x-3)^2}$

14) $I=\left]\dfrac{2}{3},+\infty\right[$, $f(x)=\dfrac{2}{(3x-2)^2}$

الحل

$f(x)$	$F(x)$	I
$3x-4$...(1)	$\dfrac{3}{2}x^2-4x+C$	$\mathbb{R}$
$2x^2-3x+1$...(2)	$\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{3}{2}x^2+x+C$	$\mathbb{R}$
$x^3-2x^2+x+\dfrac{1}{3}$...(3)	$\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x+C$	$\mathbb{R}$
$(x-1)^2$...(4)	$\dfrac{1}{3}(x-1)^3+C$	$\mathbb{R}$
$-\dfrac{2}{x^2}$...(5)	$\dfrac{2}{x}+C$	$]0,+\infty[$
$1-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{x^4}$...(6)	$x+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^3}+C$	$]0,+\infty[$
$\dfrac{3}{\sqrt{x}}$...(7)	$6\sqrt{x}+C$	$]0,+\infty[$
$\dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$...(8)	$\dfrac{-1}{x^2+x+1}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}$...(9)	$2\sqrt{x-3}+C$	$]3,+\infty[$
$\dfrac{2}{2}\times(2x-1)^3$...(10)	$\dfrac{1}{8}(2x-1)^4+C$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{2}{2}(x+1)(x^2+2x+3)$...(11)	$\dfrac{1}{4}(x^2+2x+3)^2+C$	$\mathbb{R}$

$\frac{4}{4}\times\frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}$ ...(12)	$\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+1}$	$\mathbb{R}$
$-\left[\frac{1}{(x-3)^2}\right]$ ...(13)	$\frac{1}{x-3}+C$	$]3,+\infty[$
$\frac{3}{3}\times\frac{2}{(3x-2)^2}$ ...(14)	$\frac{-2}{3(3x-2)}+C$	$\left]\frac{2}{3},+\infty\right[$

التمرين 41

عين الدالة الأصلية F للدالة f على I و التي تحقق الشرط المعطى في الحالات الآتية .

1) $f(x)=x^2-3x+1$, $F(0)=1$, $I=\mathbb{R}$.

2) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $F(1)=1$, $I=\mathbb{R}$.

3) $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{(x+1)^2}$, $F(2)=0$, $I=]1,+\infty[$.

الحل

1) الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي : $F(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+x+C$

وبما أن $F(0)=1$ فإن $C=1$, وبالتالي الدالة الأصلية التي تحقق الشرط المطلوب هي:

$$\boxed{x\mapsto\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+x+1}$$

2) الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي : $F(x)=\sqrt{x^2+1}+C$

وبما أن $F(1)=1$ فإن $C=1-\sqrt{2}$, وبالتالي الدالة الأصلية التي تحقق الشرط المطلوب هي: $\boxed{x\mapsto\sqrt{x^2+1}+1-\sqrt{2}}$

3) الدوال الأصلية للدالة f على $]1,+\infty[$ هي : $F(x)=-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}+C$

وبما أن $F(2)=0$ فإن $C=1$, وبالتالي الدالة الأصلية التي تحقق الشرط المطلوب هي : $\boxed{x\mapsto-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}+\frac{2}{3}}$

التمرين 42

لتكن f الدالة المعرفة على $]2,+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\frac{2x^2-8x}{(x-2)^2}$

1) من أجل كل x من $]2,+\infty[$, عين العددين الحقيقيين a و b بحيث

$$f(x)=a+\frac{b}{(x-2)^2}$$

2) استنتج دالة أصلية F للدالة f على $]2,+\infty[$ بحيث $F(3)=1$

الحل

1) من أجل كل x من $]2,+\infty[$,

$$a+\frac{b}{(x-2)^2}=\frac{a(x^2-4x+4)+b}{(x-2)^2}=\frac{ax^2-4ax+4a+b}{(x-2)^2}$$

وبالمطابقة مع $f(x)$ نجد $\begin{cases}a=2\\-4a=-8\\4a+b=0\end{cases}$ وبالتالي $\begin{cases}a=2\\b=-8\end{cases}$

ويكون لدينا $f(x)=2-\frac{8}{(x-2)^2}$

2) الدوال الأصلية للدالة f على $]2,+\infty[$ هي : $F(x)=2x+\frac{8}{x-2}+C$

وبما أن $F(3)=1$ فإن $C=-13$, وبالتالي الدالة الأصلية التي تحقق الشرط المطلوب هي: $\boxed{x\mapsto2x+\frac{8}{x-2}-13}$

التمرين 43

عين العددين الحقيقيين a و b حتى تكون الدالة F المعرفة كما يلي :

$F(x)=(ax+b)\sqrt{3x+5}$ دالة أصلية , على المجال $\left]-\frac{5}{3},+\infty\right[$, للدالة f

المعرفة كما يلي : $f(x)=\sqrt{3x+5}$.

الحل

إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على $\left]-\frac{5}{3},+\infty\right[$ فإن F قابلة للاشتقاق على هذا المجال

ولدينا من أجل كل x من $\left]-\frac{5}{3},+\infty\right[$, $F'(x)=f(x)$ وبالتالي

$\sqrt{3x+5}=a\left(\sqrt{3x+5}\right)+\frac{3(ax+b)}{2\sqrt{3x+5}}$, وبتوحيد مقامي الطرف الأول نجد

$\sqrt{3x+5}=\frac{9ax+10a+3b}{2\sqrt{3x+5}}$ والخلاصة أن : $6x+10=9ax+10a+3b$

وبالمطابقة نجد أن $\boxed{a=\frac{2}{3}}$ و $\boxed{b=\frac{10}{9}}$.

التمرين 44

عين الأعداد الحقيقية a و b و c حتى تكون الدالة F المعرفة كما يلي : $F(x)=(ax^2+bx+c)\sqrt{1-x}$ دالة أصلية , على المجال $]-\infty,1[$, للدالة f المعرفة كما يلي : $f(x)=x\sqrt{1-x}$.

الحل

إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على $]-\infty,1[$ فإن F قابلة للاشتقاق على هذا المجال

ولدينا من أجل كل x من $]-\infty,1[$, $F'(x)=f(x)$ وبالتالي

$$x\sqrt{1-x}=(2ax+b)\left(\sqrt{1-x}\right)-\frac{ax^2+bx+c}{2\sqrt{1-x}}$$

وبتوحيد مقامي الطرف الأول نجد $x\sqrt{1-x}=\frac{-5ax^2+(4a-3b)x+2b-c}{2\sqrt{1-x}}$

والخلاصة أن : $-2x^2+2x=-5ax^2+(4a-3b)x+2b-c$

وبالمطابقة نجد أن $\boxed{a=\frac{2}{5}}$ و $\boxed{b=\frac{-2}{15}}$ و $\boxed{c=\frac{-4}{15}}$

التمرين 45

ينتج مصنع 5000 وحدة كحد أقصى, الكلفة الهامشية $C_m(x)$ لإنتاج x وحدة (x بالآلاف) تعطى بالدستور الآتي :

$C_m(x)=\frac{1}{4}x^3-x^2+4$ ($C_m(x)$ بآلاف الدينارات), من أجل كل x من $[0,5]$.

1) إن الكلفة الهامشية هي الدالة المشتقة (بالمحاكاة) للكلفة الإجمالية $C_T(x)$.

❁ عين $C_T(x)$ علما أن $C_T(0)=45$.

2) استنتج , بدلالة x , الكلفة المتوسطة $C_M(x)$ والمعرفة كما يلي : $C_M(x)=\frac{C_T}{x}$

الحل

1) بما أن الكلفة الهامشية $C_m(x)$ هي مشتقة الدالة التي ترفق بكل كمية x , الكلفة الإجمالية $C_T(x)$, فإن $C_T(x)$ هي الدالة الأصلية للدالة التي ترفق بكل كمية x , الكلفة الهامشية $C_m(x)$ على المجال $[0,5]$, وبالتالي $C_T(x)=\frac{1}{16}x^4-\frac{1}{3}x^3+4x+C$

وبما أن $C_T(0)=45$ فإن $\boxed{C_T(x)=\frac{1}{16}x^4-\frac{1}{3}x^3+4x+45}$

2) بما أن : $C_M(x)=\frac{C_T}{x}$ فإن $C_M(x)=\frac{1}{16}x^3-\frac{1}{3}x^2+4+\frac{45}{x}$

التمرين 46

يمثل المستقيم المرسوم في الشكل الآتي , المنحني الممثل لدالة تآلفية f

عين الدالة الأصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$, بحيث أن المنحني الممثل لها يمر بالمبدأ , ثم ارسم

هذا المنحني في هذا الشكل .

الحـــل

لاحظ أن المستقيم المرسوم في الشكل يمر بالنقطتين $(0,-1)$ و $(1,1)$. وبما أن عبارة الدالة التآلفية f تكتب على الشكل $f(x)=ax+b$, فإن $\begin{cases} f(0)=-1 \\ f(1)=1 \end{cases}$ وبالتالي

$\begin{cases} -1=a(0)+b \\ 1=a(1)+b \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases}$ وعبارة f هي $f(x)=2x-1$

الدوال الأصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$ هي : $F(x)=x^2-x+C$

وبما أن المنحني الممثل للدالة F يمر بالمبدأ , فإن $F(0)=0$ ومنه $F(x)=x^2-x$

رسم المنحني الممثل للدالة F في نفس المعلم.

الدالة الأسية : هي الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $y'=y$ الذي يحقق $y(0)=1$.

ونرمز إليها بالرمز exp. ونكتب $x \mapsto \exp(x)$

تعريف آخر : توجد دالة وحيدة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$, بحيث

$f'(x)=f(x)$ و $f(0)=1$.

نسميها :" الدالة الأسية" و نرمز إليها بالرمز exp

نتائج :

- $\exp(0)=1$.
- الدالة الأسية قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $\exp'(x)=\exp(x)$.
- الدوال الأصلية للدالة الأسية على $\mathbb{R}$ هي $x \mapsto \exp(x)+C$.

- من أجل كل x من $\mathbb{R}$, $\exp(x)>0$.
- الدالة الأسية متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

اصطلاح: نضع $e=\exp(1)$, باستعمال الآلة الحاسبة نجد $e \approx 2.718$

الخواص الجبرية: من أجل كل عددين حقيقيين x و y

- $\exp(x+y)=\exp(x)+\exp(y)$ **(تحول الدالة الأسية المجموع إلى جداء)**
- $\exp(x-y)=\dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$. ❁ $\exp(-y)=\dfrac{1}{\exp(y)}$.
- $\exp(nx)=[\exp(x)]^n$, حيث n من $\mathbb{Z}$.
- $\exp\left(\dfrac{x}{n}\right)=\sqrt[n]{\exp(x)}$, حيث n من $\mathbb{N}$ و $n>1$.

حالة خاصة $\exp\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\exp(1)}=\sqrt{e}$

الترميز e^x: من أجل كل x من $\mathbb{R}$, نصطلح على أن $\exp(x)=e^x$.

النهايات

① السلوك التقاربي

- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$, يقبل المنحني الممثل للدالة الأسية , في $-\infty$, مستقيما مقاربا أفقيا هو محور الفواصل.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x}=+\infty$, يقبل المنحني الممثل للدالة الأسية , في $+\infty$, فرعا من قطع مكافئ في اتجاه محور التراتيب .

② التقريب التآلفي للدالة الأسية عند الصفر

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x}=1$, وبالتالي فالدالة $x \mapsto 1+x$ هي أفضل تقريب تآلفي للدالة الأسية عند 0 . ومن أجل x قريبة من 0 نكتب $e^x \simeq 1+x$.

③ التزايد المقارن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n . (سيأتي مفصلا)

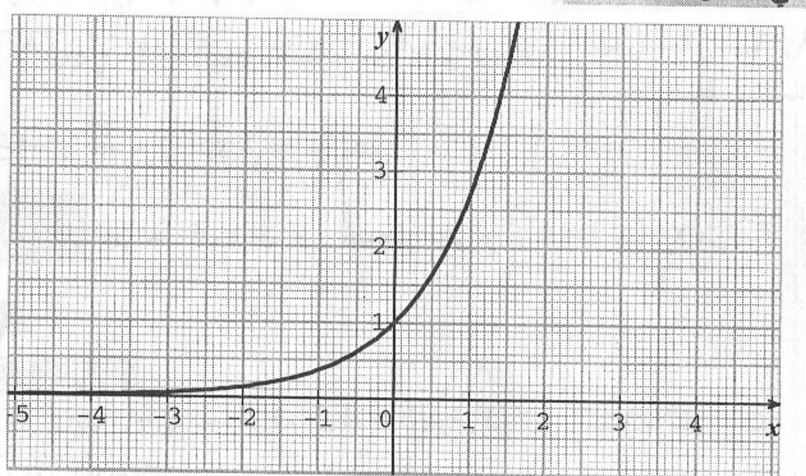
❁ $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$

لاحظ أن في اللانهاية , تتفوق الدالة الأسية على " الدالة قوة"

جدول التغيرات

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp'(x) = e^x$		$+$	
$\exp(x) = e^x$	0 ↗	1 ↗	$+\infty$

المنحني الممثل للدالة الأسية



الدالة المشتقة للدالة e^u حيث u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I

إن الدالة المركبة e^u قابلة للاشتقاق على المجال I ولدينا $(e^u)' = u' \times e^u$

مثـــال الدالة $x \mapsto -2x^2 - 1$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

الدالة $x \mapsto e^{-2x^2-1}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة $x \mapsto -4xe^{-2x^2-1}$.

نتيجة : الدوال الأصلية للدالة $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ على مجال I هي $x \mapsto e^{u(x)}$

الدالة اللوغاريتمية النيبيرية من أجل كل **عدد حقيقي موجب تماما a** , للمعادلة $e^x = a$ حل وحيد , في $\mathbb{R}$, نرمز إليه بالرمز $\ln a$ (اللوغاريتم النيبيري للعدد a)

ونتيجة لهذا إن الدالة اللوغاريتمية النيبيرية دالة عكسية للدالة الأسية.

خواص الدالة اللوغاريتمية النيبيرية تستنتج من خواص الدالة الأسية

❁ الدالة اللوغاريتمية النيبيرية معرفة على المجال $]0,+\infty[$.

❁ من أجل كل عددين حقيقيين موجبين تماما x و y , $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.

❁ من أجل كل عددين حقيقيين موجبين تماما x و y , $\ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y$.

❁ من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x , $\ln\frac{1}{y} = -\ln y$.

❁ من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x , وكل n من $\mathbb{Q}$, $\ln x^n = n\ln x$.

❁ من أجل كل عدد حقيقي x , $\ln e^x = x$.

❁ من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x , $e^{\ln x} = x$.

❁ تنعدم الدالة اللوغاريتمية عند 1 , $\ln 1 = 0$. ولدينا , أيضا , $\ln e = 1$

إشارة $\ln x$

❁ من أجل كل x من المجال $]0,1]$, $\ln x \le 0$.

❁ من أجل كل x من المجال $]1,+\infty[$, $\ln x > 0$.

النهايات

❁ $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

❁ $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = +0$, يقبل المنحني الممثل للدالة اللوغاريتمية النيبيرية فرعا من قطع مكافئ في اتجاه محور الفواصل .

❁ $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \ln x = -\infty$, يقبل المنحني الممثل للدالة اللوغاريتمية النيبيرية مستقيما مقاربا عموديا معادلته $x = 0$ (محور التراتيب)

❁ $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, ومن أجل كل $r > 0$, $\lim_{x\to 0} x^r \ln x = 0$

الدالة المشتقة للدالة اللوغاريتمية النيبيرية من أجل كل x من $]0,+\infty[$, $\ln' x = \frac{1}{x}$

نتيجـــة: الدالة $\ln$ متزايدة على $]0,+\infty[$, و من أجل كل عددين حقيقيين من هذا المجال

❁ يكون لدينا $x < y$ إذا وفقط إذا كان $\ln x < \ln y$.

❁ و يكون لدينا $x = y$ إذا وفقط إذا كان $\ln x = \ln y$.

الدالة المشتقة للدالة $\ln u$ حيث u دالة موجبة تماما وقابلة للاشتقاق على مجال I

إن الدالة المركبة $\ln u$ قابلة للاشتقاق على المجال I

ولدينا

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

مثـــال الدالة $x \mapsto -x^2+1$ موجبة تماما وقابلة للاشتقاق على $]-1,+1[$.

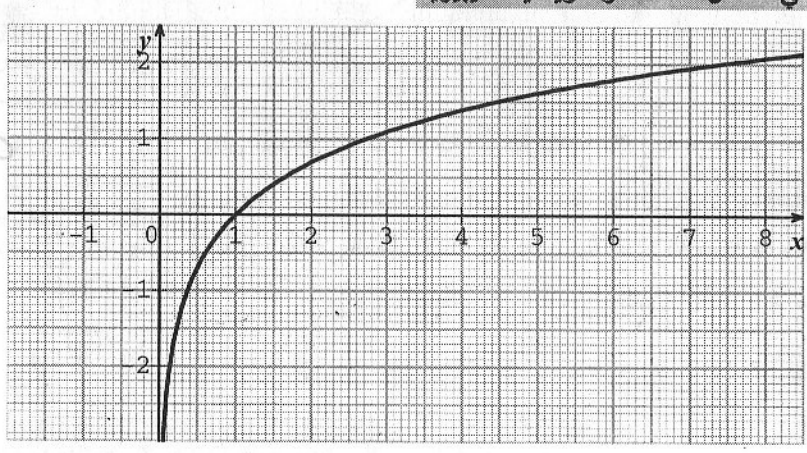
الدالة $x \mapsto \ln(-x^2+1)$ قابلة للاشتقاق على $]-1,+1[$ ودالتها المشتقة $x \mapsto \frac{-2x}{-x^2+1}$.

نتيجة : الدوال الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ على مجال I هي $x \mapsto \ln|u(x)|$

الدالة اللوغاريتمية العشرية هي الدالة التي يُرمز إليها بالرمز $\log$ والمعرفة على $]0,+\infty[$

كما يلي : $\log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$.

المنحني الممثل للدالة اللوغاريتمية النيبيرية



تمارين على الدالة الأسية

التمرين 47

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات الآتية :

1) $e^x = 3$ 2) $e^{x+2} = 1$ 3) $e^x + 1 = 0$

4) $e^{3x} = 8e^x$ 5) $e^{x^2-x-11} = e$ 6) $e^{2x} = 3e^{-x}$

7) $e^{2x} - 6e^x + 8 = 0$ 8) $e^x + 3e^{\frac{x}{2}} - 10 = 0$ 9) $e^{-x} = 3 - e^x$

10) $e^{4x} - 13e^{2x} + 36 = 0$ 11) $e^{2x} + 4e^{-2x} = 4$ 12) $\frac{3e^{2x} - 5e^x - 1}{e^{2x} - 4} = 1$

الحـــل

1) $e^x = 3$ تكافئ $\ln e^x = \ln 3$

تكافئ $x = \ln 3$ ومنه مجموعة حلول المعادلة هي $\{\ln 3\}$

2) $e^{x+2} = 1$ تكافئ $\ln e^{x+2} = \ln 1$

تكافئ $x + 2 = 0$

أي $x = -2$ ومنه مجموعة حلول المعادلة هي $\{-2\}$

3) $e^x + 1 = 0$ تكافئ $e^x = -1$

إذن ليس للمعادلة حلول

ومنه مجموعة حلول المعادلة هي ϕ .

4) $e^{3x} = 8e^x$ تكافئ $\ln e^{3x} = \ln 8e^x$

تكافئ $\ln e^{3x} = \ln 8 + \ln e^x$

تكافئ $3x = \ln 8 + x$

أي $x = \frac{\ln 8}{2}$ ومنه مجموعة حلول المعادلة هي $\left\{\frac{\ln 8}{2}\right\}$

5) $e^{x^2-x-11} = e$ تكافئ $\ln e^{x^2-x-11} = \ln e$

تكافئ $x^2 - x - 11 = 1$

تكافئ $x^2 - x - 12 = 0$ (وهي معادلة من الدرجة الثانية)

وبالتالي $\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-12) = 47$

المعادلة لها , إذن , حلان : $x_1 = \frac{1-7}{2} = -3$, $x_2 = \frac{1+7}{2} = 4$

ومنه مجموعة حلول المعادلة هي $\{-3,4\}$

6) $e^{2x} = 3e^{-x}$ تكافئ $\ln e^{2x} = \ln 3e^{-x}$

تكافئ $2x = \ln 3 + \ln e^{-x}$

تكافئ $2x = \ln 3 - x$

أي $x = \frac{\ln 3}{3}$ ومنه مجموعة حلول المعادلة هي $\left\{\frac{\ln 3}{3}\right\}$

7) $e^{2x} - 6e^{x} + 8 = 0$ تكافئ $\begin{cases} X = e^{x} \\ X^2 - 6X + 8 = 0 \end{cases}$

وبالتالي $\Delta = (-6)^2 - 4(1)(8) = 4$

للمعادلة $X^2 - 6X + 8 = 0$, إذن , حلان : $X_1 = \frac{6-2}{2} = 2$, $X_2 = \frac{6+2}{2} = 4$

- من أجل $X = 2$, المعادلة $X = e^{x}$ تكافئ $e^{x} = 2$
  أي $x = \ln 2$
- من أجل $X = 4$, المعادلة $X = e^{x}$ تكافئ $e^{x} = 4$
  أي $x = \ln 4$

ومنه مجموعة حلول المعادلة هي $\{\ln 2, \ln 4\}$

8) $e^{x} + 3e^{\frac{x}{2}} - 10 = 0$ تكافئ $\begin{cases} X = e^{\frac{x}{2}} \\ X^2 + 3X - 10 = 0 \end{cases}$

وبالتالي $\Delta = (3)^2 - 4(1)(-10) = 49$

للمعادلة $X^2 + 3X - 10 = 0$, إذن , حلان: $X_1 = \frac{-3-9}{2} = -6$

$X_2 = \frac{-3+9}{2} = 3$

- من أجل $X = -6$, المعادلة $X = e^{\frac{x}{2}}$ تكافئ $e^{\frac{x}{2}} = -6$
  وهذه المعادلة , إذن ,ليست لها حلول
- من أجل $X = 4$, المعادلة $X = e^{\frac{x}{2}}$ تكافئ $e^{\frac{x}{2}} = 4$
  تكافئ $\frac{x}{2} = \ln 4$

أي $x = 2\ln 4$

ومنه مجموعة حلول المعادلة هي $\{2\ln 4\}$

9) $e^{-x} = 3 - e^{x}$ تكافئ $1 = 3e^{x} - e^{2x}$ (بضرب الطرفين في e^{x})

تكافئ $e^{2x} - 3e^{x} + 1 = 0$

تكافئ $\begin{cases} X = e^{x} \\ X^2 - 3X + 1 = 0 \end{cases}$

وبالتالي $\Delta = (-3)^2 - 4(1)(1) = 5$

للمعادلة $X^2 - 3X + 1 = 0$, إذن , حلان : $X_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, $X_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

- من أجل $X = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, المعادلة $X = e^{x}$ تكافئ $e^{x} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$
  أي $x = \ln\frac{3-\sqrt{5}}{2}$
- من أجل $X = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, المعادلة $X = e^{x}$ تكافئ $e^{x} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$
  أي $x = \ln\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

ومنه مجموعة حلول المعادلة هي $\left\{\ln\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \ln\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$

10) $e^{4x} - 13e^{2x} + 36 = 0$ تكافئ $\begin{cases} X = e^{2x} \\ X^2 - 13X + 36 = 0 \end{cases}$

وبالتالي $\Delta = (-13)^2 - 4(1)(36) = 25$

للمعادلة $X^2 - 13X + 36 = 0$, إذن , حلان : $X_1 = \frac{13-5}{2} = 4$

$X_2 = \frac{13+5}{2} = 9$

- من أجل $X = 4$, المعادلة $X = e^{x}$ تكافئ $e^{2x} = 4$
  تكافئ $2x = \ln 4$
  أي $x = \frac{\ln 4}{2}$
- من أجل $X = 9$, المعادلة $X = e^{x}$ تكافئ $e^{2x} = 9$

تكافئ $2x = \ln 9$

أي $x = \dfrac{\ln 9}{2}$

ومنه مجموعة حلول المعادلة هي $\left\{\dfrac{\ln 4}{2}, \dfrac{\ln 9}{2}\right\}$

11) $e^{2x} + 4e^{-2x} = 4$ تكافئ $e^{4x} + 4 = 4e^{2x}$ (بضرب الطرفين في e^{2x})

تكافئ $e^{4x} - 4e^{2x} + 4 = 0$

تكافئ $\begin{cases} X = e^{2x} \\ X^2 - 4X + 4 = 0 \end{cases}$

وبالتالي $\Delta = (-4)^2 - 4(1)(4) = 0$

للمعادلة $X^2 - 4X + 4 = 0$, إذن , حل مضاعف : $X = \dfrac{4}{2} = 2$

من أجل $X = 2$, المعادلة $X = e^{2x}$ تكافئ $e^{2x} = 2$

تكافئ $2x = \ln 2$

أي $x = \dfrac{\ln 2}{2}$

ومنه مجموعة حلول المعادلة هي $\left\{\dfrac{\ln 2}{2}\right\}$.

12) تكون المعادلة $\dfrac{3e^{2x} - 5e^x - 1}{e^{2x} - 4} = 1$ معرفة إذا وفقط إذا كان $e^{2x} - 4 \neq 0$

إذا وفقط إذا كان $e^{2x} \neq 4$

إذا وفقط إذا كان $2x \neq \ln 4$

أي $x \neq \dfrac{\ln 4}{2}$

ومنه مجموعة تعريف المعادلة $\dfrac{3e^{2x} - 5e^x - 1}{e^{2x} - 4} = 1$ هي $D = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{\ln 4}{2}\right\}$

من أجل x من D , بضرب الطرفين في $e^{2x} - 4$ نجد $3e^{2x} - 5e^x - 1 = e^{2x} - 4$

وهذه المعادلة تكافئ $2e^{2x} - 5e^x + 3 = 0$

تكافئ $\begin{cases} X = e^x \\ 2X^2 - 5X + 3 = 0 \end{cases}$

وبالتالي $\Delta = (-5)^2 - 4(2)(3) = 1$

للمعادلة $2X^2 - 5X + 3 = 0$, إذن , حلان : $X_1 = \dfrac{5-1}{4} = 1$, $X_2 = \dfrac{5+1}{4} = \dfrac{3}{2}$

- من أجل $X = 1$, المعادلة $X = e^x$ تكافئ $e^x = 1$

  أي $x = 0$

- من أجل $X = \dfrac{3}{2}$, المعادلة $X = e^x$ تكافئ $e^x = \dfrac{3}{2}$

  أي $x = \ln\dfrac{3}{2}$

ومنه مجموعة حلول المعادلة هي $\left\{0, \ln\dfrac{3}{2}\right\}$

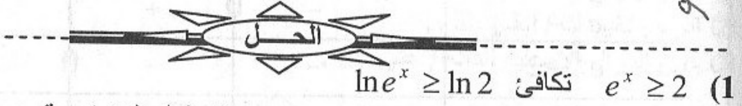
التمرين48

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات الآتية :

1) $e^x \geq 2$ **2)** $e^{2x} \geq 3$ **3)** $e^{-x} - 1 < 0$

4) $e^{3x} - 2 \leq 0$ **5)** $e^{x^2} \geq 1$ **6)** $e^{x^2} \geq e^x$

7) $e^{2x} - 3e^x + 2 > 0$ **8)** $e^x + 3e^{\frac{x}{2}} - 10 \geq 0$ **9)** $e^{|x-1|} \geq 1$



1) $e^x \geq 2$ تكافئ $\ln e^x \geq \ln 2$

تكافئ $x \geq \ln 2$ ومنه مجموعة حلول المتراجحة هي $[\ln 2, +\infty[$

2) $e^{2x} \geq 3$ تكافئ $\ln e^{2x} \geq \ln 3$

تكافئ $2x \geq \ln 3$ ومنه مجموعة حلول المتراجحة هي $\left[\dfrac{\ln 3}{2}, +\infty\right[$

3) $e^{-x} - 1 < 0$ تكافئ $\ln e^{-x} < \ln 1$

تكافئ $-x < 0$

أي $x > 0$ ومنه مجموعة حلول المتراجحة هي $]0, +\infty[$

4) $e^{3x} - 2 \leq 0$ تكافئ $\ln e^{3x} \leq \ln 2$

تكافئ $3x \leq \ln 2$

أي $x \leq \dfrac{\ln 2}{3}$ ومنه مجموعة حلول المتراجحة هي $\left]-\infty, \dfrac{\ln 2}{3}\right]$

5) $e^{x^2} \geq 1$ تكافئ $\ln e^{x^2} \geq \ln 1$

تكافئ $x^2 \geq 0$ ومنه مجموعة حلول المتراجحة هي $\mathbb{R}$

6) $e^{x^2} \geq e^x$ تكافئ $\ln e^{x^2} \geq \ln e^x$

تكافئ $x^2 \ge x$

تكافئ $x^2 - x \ge 0$ أي $x(x-1) \ge 0$

ندرس إشارة $x(x-1)$.

نستنتج أن مجموعة حلول المتراجحة هي: $]-\infty,0]\cup[1,+\infty[$.

7) $e^{2x}-3e^x+2>0$ تكافئ $\begin{cases} X=e^x \\ X^2-3X+2>0 \end{cases}$

لدينا $\Delta=(-3)^2-4(1)(2)=1$

لكثير الحدود X^2-3X+2 , إذن , جذران : $X_1=\frac{3-1}{2}=1$, $X_2=\frac{3+1}{2}=2$

وبالتالي $X^2-3X+2=(X-1)(X-2)$

ومنه المتراجحة $e^{2x}-3e^x+2>0$ تكافئ $(e^x-1)(e^x-2)>0$

ندرس إشارة $(e^x-1)(e^x-2)$

x	$-\infty$		0		$\ln 2$		$+\infty$
e^x-1		$-$	0	$+$		$+$	
e^x-2		$-$		$-$	0	$+$	
$(e^x-1)(e^x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ومنه مجموعة حلول المتراجحة $e^{2x}-3e^x+2>0$ هي $]-\infty,0[\cup]\ln 2,+\infty[$

8) $e^x+3e^{\frac{x}{2}}-10\ge 0$ تكافئ $\begin{cases} X=e^{\frac{x}{2}} \\ X^2+3X-10\ge 0 \end{cases}$

لدينا $\Delta=(3)^2-4(1)(-10)=49$

لكثير الحدود $X^2+3X-10$, إذن , جذران : $X_1=\frac{-3-7}{2}=-5$

$X_2=\frac{-3+7}{2}=2$

وبالتالي $X^2+3X-10=(X+5)(X-2)$

ومنه المتراجحة $e^x+3e^{\frac{x}{2}}-10\ge 0$ تكافئ $\left(e^{\frac{x}{2}}+5\right)\left(e^{\frac{x}{2}}-2\right)\ge 0$

وبما أن من أجل كل x من $\mathbb{R}$, $e^{\frac{x}{2}}+5>0$ فإن

المتراجحة $e^x+3e^{\frac{x}{2}}-10\ge 0$ تكافئ $e^{\frac{x}{2}}-2\ge 0$

تكافئ $e^{\frac{x}{2}}\ge 2$

أي $x\ge 2\ln 2$

فإن مجموعة حلول المتراجحة $e^x+3e^{\frac{x}{2}}-10\ge 0$ هي $]2\ln 2,+\infty[$

9) $e^{|x-1|}\ge 1$ تكافئ $\ln e^{|x-1|}\ge 0$

تكافئ $|x-1|\ge 0$ ومنه مجموعة حلول المتراجحة هي $\mathbb{R}$



لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=e^x-3x$

① عين نهايتي f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

② ادرس تغيرات f على $\mathbb{R}$.

③ عين الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.



① حساب النهايتين

❁ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} e^x+\lim_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} e^x+\lim_{x\to+\infty}(-x)=+\infty-\infty$

$\lim_{x\to-\infty} e^x=0$

$\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$

وهي حالة عدم التعيين , ترفع بالطريقة الآتية

❁ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^x}{x}-3\right)=(+\infty)(+\infty)=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$

② دراسة تغيرات الدالة f

❁ الدالة المشتقة : من أجل كل x من $\mathbb{R}$, $f'(x)=e^x-3$

ندرس إشارة e^x-3 بالطريقة الآتية :

• $e^x-3=0$ تكافئ $e^x=3$ أي $x=\ln 3$.

• $e^x-3<0$ تكافئ $e^x<3$ أي $x<\ln 3$.

• $e^x - 3 > 0$ تكافئ $e^x > 3$ أي $x > \ln 3$.

ومنه من أجل x من $]-\infty, \ln 3[$, $f'(x) < 0$ وبالتالي f متناقصة تماما على هذا المجال.

ومن أجل x من $]\ln 3, +\infty[$, $f'(x) > 0$ وبالتالي f متزايدة تماما على هذا المجال.

❁ جدول التغيرات :

x	$-\infty$	$\ln 3$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$3(1-\ln 3)$	↗ $+\infty$

③ **الدوال الأصلية للدالة f**

بما أن الدالة $x \mapsto e^x$ دالة أصلية للدالة $x \mapsto e^x$ على $\mathbb{R}$

و الدالة $x \mapsto -\frac{3}{2}x^2$ دالة أصلية للدالة $x \mapsto -3x$ على $\mathbb{R}$

فإن الدوال الأصلية للدالة f هي $x \mapsto e^x - \frac{3}{2}x^2 + C$ ، حيث C ثابت حقيقي

التمرين 50

لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = -2x + 1 + e^x$.

C_f المنحني الممثل للدالة f في مستو منسوب إلى معلم متعامد $(O, \vec{i}, \vec{j})$

① عين نهايتي f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

② ادرس تغيرات f على $\mathbb{R}$.

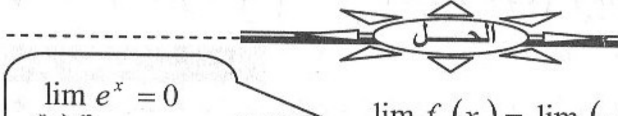
③ برهن أن المستقيم D الذي معادلته $y = -2x + 1$ مستقيم مقارب للمنحني C_f

ادرس وضعية C_f بالنسبة إلى المستقيم D على $\mathbb{R}$.

④ عين معادلة للمماس T للمنحني C_f عند النقطة التي فاصلتها 0 .

الحل

① **حساب النهايتين**



$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (-2x+1) + \lim_{x \to -\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (-2x+1) + \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

② **دراسة تغيرات الدالة f**

❁ الدالة المشتقة : من أجل كل x من $\mathbb{R}$, $f'(x) = -2 + e^x$

ندرس إشارة $-2 + e^x$ بالطريقة الآتية :

• $e^x - 2 = 0$ تكافئ $e^x = 2$ أي $x = \ln 2$.

• $e^x - 2 < 0$ تكافئ $e^x < 2$ أي $x < \ln 2$.

• $e^x - 2 > 0$ تكافئ $e^x > 2$ أي $x > \ln 2$.

ومنه من أجل x من $]-\infty, \ln 2[$, $f'(x) < 0$ وبالتالي f متناقصة تماما على هذا المجال.

ومن أجل x من $]\ln 2, +\infty[$, $f'(x) > 0$ وبالتالي f متزايدة تماما على هذا المجال.

❁ جدول التغيرات :

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$3 - 2\ln 3$	↗ $+\infty$

③ **المستقيم المقارب والوضعية**

❁ بما أن $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (-2x+1)] = \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ فإن المستقيم D ذا المعادلة

$y = -2x + 1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني C_f عند $-\infty$

❁ من أجل كل x من $\mathbb{R}$, $f(x) - (-2x+1) = e^x > 0$ (لأن $e^x > 0$)

إذن يقع C_f فوق D .

④ **المماس T** نحسب : $f'(0) = -1$, $f(0) = 2$

نعوض في المعادلة $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ فنجد $y = -x + 2$

التمرين 51

لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = e^{2x} - 4e^x$.

C_f المنحني الممثل للدالة f في مستو منسوب إلى معلم متعامد $(O, \vec{i}, \vec{j})$

① عين نهايتي f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

② ادرس تغيرات f على $\mathbb{R}$.

③ عين احداثيات نقط تقاطع المنحني C_f مع المستقيم D ذي المعادلة $y = -3$

④ عين الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.



① حساب النهايتين

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{2x} + \lim_{x\to-\infty}\left(-4e^x\right) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{2x} + \lim_{x\to+\infty}\left(-4e^x\right) = +\infty-\infty$$

$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

وهي حالة عدم التعيين ,ترفع بالطريقة الآتية

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^x\left(\frac{e^{2x}}{e^x}-4\right) = \lim_{x\to+\infty} e^x\left(e^x-4\right) = +\infty$$

② دراسة تغيرات الدالة f

الدالة المشتقة : من أجل كل x من $\mathbb{R}$, $f'(x)=2e^{2x}-4e^x=2e^x\left(e^x-2\right)$

ندرس , فقط , إشارة e^x-2 (لأن :من أجل كل x من $\mathbb{R}$, $e^x>0$) بالطريقة الآتية :

- $e^x-2=0$ تكافئ $e^x=2$ أي $x=\ln 2$.
- $e^x-2<0$ تكافئ $e^x<2$ أي $x<\ln 2$.
- $e^x-2>0$ تكافئ $e^x>2$ أي $x>\ln 2$.

ومنه من أجل x من $]-\infty,\ln 2[$, $f'(x)<0$ وبالتالي f متناقصة تماما على هذا المجال.

ومن أجل x من $]\ln 2,+\infty[$, $f'(x)>0$ وبالتالي f متزايدة تماما على هذا المجال.

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	-4	↗ $+\infty$

③ تقاطع المنحني C_f مع المستقيم D

المعادلة $e^{2x}-4e^x=-3$ تكافئ $e^{2x}-4e^x+3=0$

تكافئ $\begin{cases} X=e^x \\ X^2-4X+3=0 \end{cases}$

وبالتالي $\Delta=(-4)^2-4(1)(3)=4$

للمعادلة $X^2-4X+3=0$, إذن , حلان : $X_1=\frac{4-2}{2}=1$, $X_2=\frac{4+2}{2}=3$

- من أجل $X=1$, المعادلة $X=e^x$ تكافئ $e^x=1$
  أي $x=0$

- من أجل $X=3$, المعادلة $X=e^x$ تكافئ $e^x=3$
  أي $x=\ln 3$

ومنه مجموعة حلول المعادلة هي $\{0,\ln 3\}$.

إذن C_f يقطع المستقيم D في النقطتين $A(0,-3)$, $B(\ln 3,-3)$

④ الدوال الأصلية للدالة f

بما أن الدالة $x\mapsto e^x$ دالة أصلية للدالة $x\mapsto e^x$ على $\mathbb{R}$

و الدالة $x\mapsto \frac{1}{2}e^{2x}$ دالة أصلية للدالة $x\mapsto e^{2x}$ على $\mathbb{R}$

فإن الدوال الأصلية للدالة f هي $x\mapsto \frac{1}{2}e^{2x}-4e^x+C$, حيث C ثابت حقيقي



لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x+e^{1-x}$.

C_f المنحني الممثل للدالة f في مستو منسوب إلى معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$

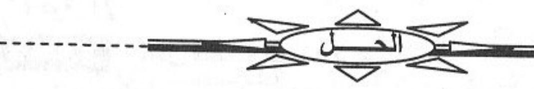
① عين نهايتي f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

② ادرس تغيرات f على $\mathbb{R}$.

③ برهن أن المستقيم D الذي معادلته $y=x$ مستقيم مقارب للمنحني C_f
ادرس وضعية C_f بالنسبة إلى المستقيم D على $\mathbb{R}$.

④ برهن على وجود نقطة A من المنحني C_f يكون فيها المماس T له معامل توجيه يساوي -1 . عين معادلة للمماس T.

⑤ عين دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.



①حساب النهايتين

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(x) + \lim_{x\to-\infty} e^{1-x} = -\infty+\infty$$

وهذه حالة عدم تعيين , نرفعها بالطريقة الآتية

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x\left(1+\frac{e^{1-x}}{1-x}\times\frac{1-x}{x}\right) = (-\infty)(-\infty) = +\infty$$

لأن $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{1-x}}{1-x}=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{1-x}{x}=-1$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x) + \lim_{x\to+\infty} e^{1-x} = +\infty$$

② دراسة تغيرات الدالة f

۞ الدالة المشتقة : من أجل كل x من $\mathbb{R}$, $f'(x)=1+-e^{1-x}$

ندرس إشارة $1-e^{1-x}$ بالطريقة الآتية :

- $1-e^{1-x}=0$ تكافئ $e^{1-x}=1$ تكافئ $1-x=0$, أي $x=1$.
- $1-e^{1-x}<0$ تكافئ $e^{1-x}>1$ تكافئ $1-x>0$, أي $x<1$.
- $1-e^{1-x}>0$ تكافئ $e^{1-x}<1$ تكافئ $1-x<0$, أي $x>1$.

ومنه من أجل x من $]-\infty,1[$, $f'(x)<0$ وبالتالي f متناقصة تماما على هذا المجال.

ومن أجل x من $]1,+\infty[$, $f'(x)>0$ وبالتالي f متزايدة تماما على هذا المجال.

۞ جدول التغيرات :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

③ المستقيم المقارب والوضعية

۞ بما أن $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}e^{1-x}=0$ فإن المستقيم D ذا المعادلة $y=x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني C_f عند $+\infty$.

۞ من أجل كل x من $\mathbb{R}$, $f(x)-x=e^{1-x}>0$ (لأن $e^x>0$)

إذن يقع C_f فوق D .

④ وجود النقطة A لتكن فاصلة النقطة A هي a

بما أن معامل توجيه المماس هو -1 فإن $f'(a)=-1$ وبالتالي

المساواة $f'(a)=-1$ تكافئ $1+-e^{1-a}=-1$

تكافئ $e^{1-a}=2$ أي $1-a=\ln 2$ ومنه $\boxed{a=1-\ln 2}$

وبالتالي $f(1-\ln 2)=3-\ln 2$

نعوض في المعادلة $y=f'(1-\ln 2)(x-1+\ln 2)+f(1-\ln 2)$ فنجد

$y=-(x-1+\ln 2)+3-\ln 2$ أي $\boxed{y=-x+4-2\ln 2}$

التمرين 53

لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=(x^2-x-1)e^x$.

C_f المنحني الممثل للدالة f في مستو منسوب إلى معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$

① عين نهايتي f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

② ادرس تغيرات f على $\mathbb{R}$.

③ عين الأعداد الحقيقية a , b , c بحيث تكون الدالة F المعرفة كما يلي $F(x)=(ax^2+bx+c)e^x$ دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

الحل



① حساب النهايتين

۞ $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^2-x-1)\times\lim_{x\to-\infty}e^x=+\infty\times 0$

وهذه حالة عدم تعيين , نرفعها بالطريقة الآتية

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x^2e^x-xe^x-e^x\right)=0$$

لأن $\lim_{x\to-\infty}x^2e^x=0$ و $\lim_{x\to-\infty}xe^x=0$ و $\lim_{x\to-\infty}e^x=0$

۞ $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^2-x-1)\times\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$,

② دراسة تغيرات الدالة f

۞ الدالة المشتقة : من أجل كل x من $\mathbb{R}$,

$$f'(x)=(2x-1)e^x+(x^2-x-1)e^x=(x^2+x-2)e^x$$

نلاحظ أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$, $e^x>0$,

وبالتالي إشارة $f'(x)$ من إشارة x^2+x-2 , وإليك ملخصا لإشارته :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x^2+x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

ومنه من أجل كل x من $]-\infty,-2[\cup]1,+\infty[$, $f'(x)>0$, وبالتالي f متزايدة تماما على هذا المجال.

ومن أجل كل x من $]-2,1[$, $f'(x)<0$, وبالتالي f متناقصة تماما على هذا المجال.

۞ جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{5}{e^2}$	↘	$-e$	↗	$+\infty$

③ تعيين الأعداد c, b, a

إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ فإن F قابلة للاشتقاق على هذا المجال

ولدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $F'(x)=f(x)$ وبالتالي

$$(x^2-x-1)e^x=(2ax+b)e^x+(ax^2+bx+c)e^x$$

$$=\left[ax^2+(2a+b)x+b+c\right]e^x$$

والخلاصة أن : $x^2-x-1=ax^2+(2a+b)x+b+c$

وبالمطابقة نجد أن $a=1$ و $b=-3$ و $c=2$ ومنه $F(x)=(x^2-3x+2)e^x$



1) لتكن g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=x-1+e^{-x}$.

① ادرس تغيرات g على $\mathbb{R}$. (لا يطلب حساب النهايتين)

② استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

2) لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x-e^{-x}$.

C_f المنحني الممثل للدالة f في مستو منسوب إلى معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$

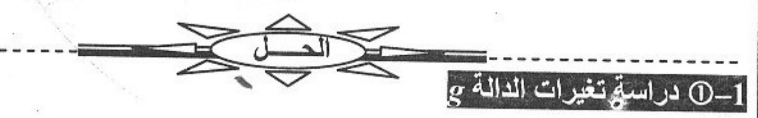
① عين نهايتي f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

② باستعمال نتائج السؤال **(1)** ، ادرس تغيرات f على $\mathbb{R}$.

③ عين معادلة للمماس T للمنحني C_f عند النقطة التي فاصلتها 0 .

④ برهن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيد x_0 على المجال $]0,+\infty[$.

تأكد من أن $2<x_0<3$. ثم عين قيمة تقريبية لـ x_0 بتقريب 0.1 بالزيادة.



1-① دراسة تغيرات الدالة g

۞ الدالة المشتقة : من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x)=1-e^{-x}$

ندرس إشارة $1-e^{-x}$ بالطريقة الآتية :

- $1-e^{-x}=0$ تكافئ $e^{-x}=1$
  تكافئ $-x=0$ ، أي $x=0$.
- $1-e^{-x}<0$ تكافئ $e^{-x}>1$
  تكافئ $-x>0$ ، أي $x<0$.
- $1-e^{-x}>0$ تكافئ $e^{-x}<1$
  تكافئ $-x<0$ ، أي $x>0$.

ومنه من أجل x من $]-\infty,0[$ ، $g'(x)<0$ وبالتالي g متناقصة تماما على هذا المجال.

ومن أجل x من $]0,+\infty[$ ، $g'(x)>0$ وبالتالي g متزايدة تماما على هذا المجال.

۞ جدول التغيرات :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘	0	↗	

② إشارة $g(x)$ من جدول التغيرات نستنتج إشارة $g(x)$ كما في الجدول الآتي

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$+$	

2-① حساب النهايتين

۞ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)-\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty-(+\infty)$

وهذه حالة عدم تعيين ، نرفعها بالطريقة الآتية

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}x^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x}-\frac{e^{-x}}{x^2}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty$$

لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{(-x)^2}=+\infty$.

۞ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)-\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=+\infty$ ، لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$

② دراسة تغيرات الدالة f

۞ الدالة المشتقة : من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x)=x-1+e^{-x}=g(x)$

وإشارة $f'(x)$, إذن , من إشارة $g(x)$:

ومنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$, $f'(x) \geq 0$, الدالة f متزايدة .

۞ جدول التغيرات :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	(-1)	↗ $+\infty$

③ المماس T نحسب : $f(0)=-1$, $f'(0)=0$

نعوض في المعادلة $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ فنجد $y=-1$ (أفقي)

④ المعادلة $f(x)=0$

۞ بما أن الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على $]0,+\infty[$ و $f(0)=-1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_0 على هذا المجال.

۞ وبما أن $f(2)=-e^{-2}$ و $f(3)=\frac{3}{2}-\frac{1}{e^3}$ أي $f(2)\times f(3)<0$ فإن $2<x_0<3$.

۞ من أجل تعيين قيمة مقربة لـ x_0 إلى 0.1 بالزيادة , نمسح المجال $[2,3]$ بخطوة قدرها 0.1 كالآتي :

x	2	2.1	2.2	2.3	2.4					2.9	3
$f(x)$	−0.13	−0.01	0.10								

نوقف الحساب بعد 2.2 لأن $f(x)$ تجاوزت 0 .

نستنتج من الجدول أن القيمة المقربة لـ x_0 إلى 0.1 بالزيادة هي 2.2.



1) لتكن g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=(1-x)e^x-1$.

① عين نهايتي g عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

② ادرس تغيرات g على $\mathbb{R}$.

③ استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

2) لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=(2-x)e^x+2-x$.

C_f المنحني الممثل للدالة f في مستو منسوب إلى معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$

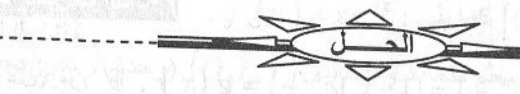
① عين نهايتي f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

② اشتق الدالة f . استنتج , باستعمال نتائج السؤال **(1)** , تغيرات f على $\mathbb{R}$.

③ برهن أن المستقيم D ذا المعادلة $y=2-x$ مستقيم مقارب للمنحني C_f

ادرس وضعية C_f بالنسبة إلى المستقيم D على $\mathbb{R}$.

④ برهن أنه توجد نقطة A من المنحني C_f يكون فيها المماس T موازيا للمستقيم D . عين إحداثيي هذه النقطة و معادلة للمماس T.



1- ① حساب النهايتين

۞ $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(1-x)\times\lim\limits_{x\to-\infty}e^x+1=-\infty\times 0$

وهذه حالة عدم تعيين , نرفعها بالطريقة الآتية

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x-xe^x-1)=-1$ (لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$)

۞ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)\times\lim\limits_{x\to+\infty}e^x+1=-\infty$

② دراسة تغيرات الدالة g

۞ الدالة المشتقة : من أجل كل x من $\mathbb{R}$, $g'(x)=-xe^x$

نلاحظ أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$, $e^x>0$

وبالتالي إشارة $g'(x)$ من إشارة $-x$, وإليك ملخصا لإشارته :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-x$	$+$	0	$-$

ومنه من أجل x من $]-\infty,0[$, $g'(x)>0$ وبالتالي g متزايدة تماما على هذا المجال.

ومن أجل x من $]0,+\infty[$, $g'(x)<0$ وبالتالي g متناقصة تماما على هذا المجال.

۞ جدول التغيرات :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	-1 ↗	0	↘ $-\infty$

② إشارة $g(x)$ من جدول التغيرات نستنتج إشارة $g(x)$ كما في الجدول الآتي

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$-$

2-① حساب النهايتين

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(2e^x-xe^x\right)+\lim_{x\to-\infty}(2-x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(2-x)e^x+\lim_{x\to+\infty}(2-x)=-\infty$$

② دراسة تغيرات الدالة f

الدالة المشتقة :

من أجل كل x من $\mathbb{R}$, $f'(x)=-e^x+(2-x)e^x-1=(1-x)e^x-1=g(x)$

وإشارة $f'(x)$, إذن , من إشارة $g(x)$.

ومنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$, $f'(x)\le 0$, الدالة f متناقصة .

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	(4) ↘	$-\infty$

③ المستقيم المقارب والوضعية

بما أن $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(2-x)\right]=\lim_{x\to-\infty}(2-x)e^x=0$ فإن المستقيم D ذا المعادلة $y=2-x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني C_f عند $-\infty$.

من أجل كل x من $\mathbb{R}$, $f(x)-(2-x)=(2-x)e^x$

وإشارة $(2-x)e^x$, إذن , من إشارة $(2-x)$ وبالتالي

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)-(2-x)$	$+$	0	$-$
الوضعية	C_f فوق D	C_f يقطع D	C_f تحت D

④ وجود النقطة A لتكن فاصلة النقطة A هي a

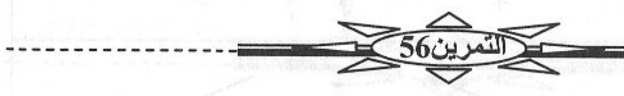
بما أن المماس T يوازي D فإن لهما نفس معامل التوجيه أي $f'(a)=-1$ وبالتالي

المساواة $f'(a)=-1$ تكافئ $(1-a)e^a-1=-1$

تكافئ $(1-a)e^a=0$ أي $1-a=0$ ومنه $a=1$

وبالتالي $f(1)=e+1$ ومنه $A(1,e+1)$.

نعوض في المعادلة $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ فنجد $y=-(x-1)+e+1$ أي $y=-x+e+2$.



لتكن f دالة معرفة على $[0,+\infty[$ كما يلي : $f(x)=xe^{-x}$.

Γ المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.(وحدة الرسم : $10\ cm$)

1. أ. عين نهاية الدالة f عند $+\infty$.

ب. ادرس تغيرات الدالة f و أنجز جدول تغيراتها

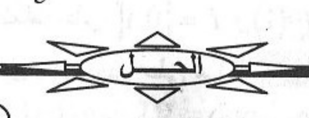
جـ. ارسم Γ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2. أ. بين أنه من أجل كل m من $\left]0,\frac{1}{e}\right[$, تقبل المعادلة $f(x)=m$ حلين .

ب. في الحالة $m=\frac{1}{4}$, نرمز إلى الحلين بالرمزين α و β حيث $\alpha<\beta$.

عين حصرا سعته 10^{-2} للحل α .

جـ. حل المعادلة $f(x)=m$ في الحالتين $m=0$ و $m=\frac{1}{e}$



$\lim_{*\to-\infty} *e^{*}=0$

1. أ. **حساب نهاية f عند $+\infty$**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}-\left(-xe^{-x}\right)=0$$

ب. **دراسة تغيرات الدالة f**

الدالة المشتقة :

من أجل كل x من $[0,+\infty[$, $f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$

وإشارة $f'(x)$, إذن , من إشارة $1-x$.

x	0	1	$+\infty$
$1-x$	$+$	0	$-$

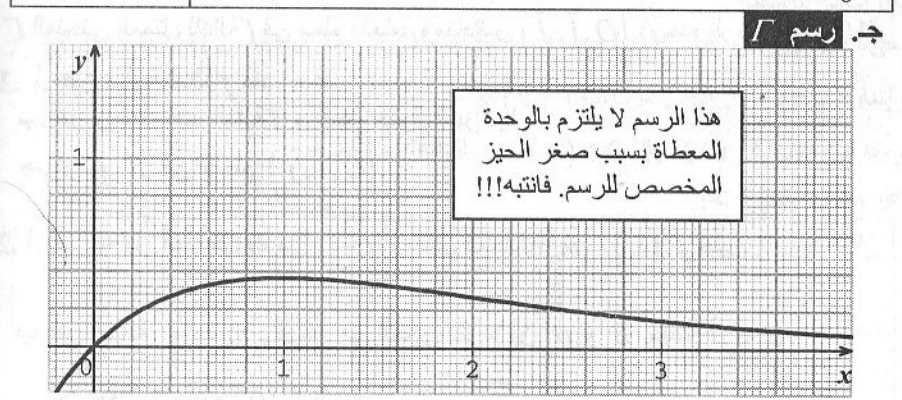
ومنه , من أجل كل x من $]0,1[$, $f'(x)>0$, الدالة f متزايدة تماما .

ومن أجل كل x من $]0,+\infty[$, $f'(x)<0$, الدالة f متناقصة تماما.

❁ جدول التغيرات :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

جـ. رسم Γ



2. أ. المعادلة $f(x)=m$

بما أن الدالة f مستمرة ورتيبة تماما على $I=[0,1[$ و $f(0)<m<f(1)$

فإن المعادلة $f(x)=m$ تقبل حلا وحيدا على هذا المجال.

ملاحظة : يمكن استبدال الشرط $f(0)<m<f(1)$ بالشرط $m\in f(I)$

و بما أن الدالة f مستمرة ورتيبة تماما على $I=[1,+\infty[$ و $m\in f(I)$

فإن المعادلة $f(x)=m$ تقبل حلا وحيدا على هذا المجال.

الخلاصة : تقبل المعادلة $f(x)=m$ حلين .

ب. في الحالة $m=\frac{1}{4}$ لتكن المعادلة $f(x)=\frac{1}{4}$

❁ من أجل تعيين حصرا للحل α , نمسح المجال $[0,1]$ بخطوة قدرها 10^{-2} كالآتي :

x	0	0.01				0.35	0.36						0.9	1
$f(x)$	0.00	0.09				0.24	0.25							

نوقف الحساب بعد 0.36 لأن $f(x)$ تجاوزت 0.25 .

نستنتج من الجدول حصرا للحل α سعته 10^{-2} هو $0.35<\alpha<0.36$.

جـ. المعادلة $f(x)=0$ تكافئ $x=0$.

المعادلة $f(x)=\frac{1}{e}$ تكافئ $x=1$



لتكن f دالة معرفة على $]0,+\infty[$ كما يلي : $f(x)=(x-1)(2-e^{-x})$.

Γ المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.(وحدة الرسم : $2\ cm$)

① عين نهاية الدالة f عند $+\infty$.

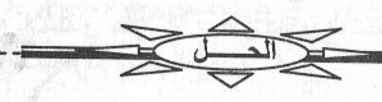
② برهن أن المستقيم Δ ذا المعادلة $y=2x-2$ مستقيم مقارب للمنحني Γ .

③ ادرس وضعية Γ بالنسبة إلى المستقيم Δ .

④ احسب $f'(x)$ وبين أن $f'(x)=xe^{-x}+2(1-e^{-x})$.

⑤ استنتج أنه من أجل كل x من $]0,+\infty[$, $f'(x)>0$.

⑥ عين قيمة $f'(0)$ ثم أنجز جدول تغيرات الدالة f.



① حساب نهاية f عند $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=(+\infty)(2)=+\infty$$

②③ المستقيم المقارب والوضعية

❁ بما أن $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x-2)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(-xe^{-x}+e^{-x}\right)=0$ فإن المستقيم

Δ ذا المعادلة $y=2x-2$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني Γ عند $+\infty$.

❁ من أجل كل x من $]0,+\infty[$, $f(x)-(2x-2)=(1-x)e^{-x}$

وإشارة $(1-x)e^{-x}$, إذن , من إشارة $(1-x)$ وبالتالي

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)-(2-x)$		$+$	0	$-$	
الوضعية		Γ فوق Δ	Γ يقطع Δ	Γ تحت Δ	

④ حساب $f'(x)$

من أجل كل x من $]0,+\infty[$ ، $f'(x)=2-e^{-x}+(x-1)e^{-x}$

ومنه $f'(x)=2-e^{-x}+(x-1)e^{-x}=xe^{-x}+2(1-e^{-x})$

⑤ إشارة $f'(x)$ من أجل كل x من $]0,+\infty[$ ، $xe^{-x}>0$ و $1-e^{-x}=1-\frac{1}{e^{x}}>0$

إذن ، من أجل كل x من $]0,+\infty[$ ، $f'(x)>0$.

⑥ جدول تغيرات f لدينا $f'(0)=0$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	1	↗	$+\infty$



لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x^2e^{1-x}$.

Γ المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.(وحدة الرسم : $2\ cm$)

① عين نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$. ماذا تستنتج بيانيا بالنسبة للمنحني Γ ؟

② بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$. عين دالتها المشتقة f'.

③ أنجز جدول تغيرات الدالة f ثم ارسم المنحني Γ

الحل

① حساب النهايتين

$\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$

❁ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^2\times\lim_{x\to-\infty}(e^{1-x})=+\infty$

❁ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^2\times\lim_{x\to+\infty}(e^{1-x})=0$

❁ الاستنتاج البياني :

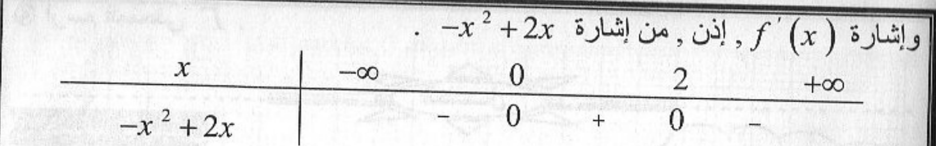
- بما أن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$ فإن للمنحني فرعا من قطع مكافئ في اتجاه محور التراتيب.
- بما أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ فإن للمنحني مستقيما مقاربا أفقيا هو محور التراتيب .

② الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها عبارة عن جداء دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$

❁ الدالة المشتقة :

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x)=2xe^{1-x}+-x^2e^{1-x}=(-x^2+2x)e^{1-x}$

وإشارة $f'(x)$ ، إذن ، من إشارة $-x^2+2x$.



x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$-x^2+2x$		$-$	0	$+$	0	$-$	

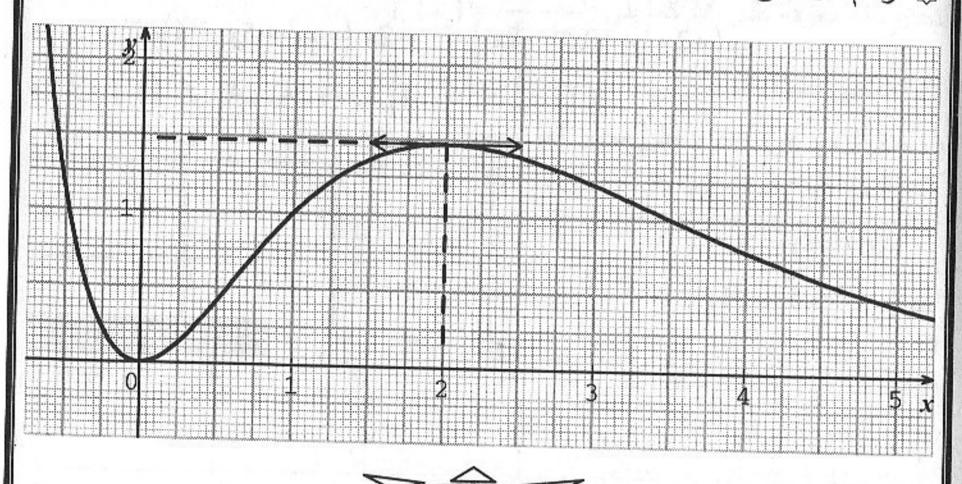
③ جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{4}{e}$	↘	0

❁ رسم المنحني Γ : وخطواته هي :

❁ نرسم النقطتين : $(0,0)$ و $\left(2,\frac{4}{e}\right)$ (بملاحظة جدول التغيرات) .

❁ نرسم Γ على المجال $\mathbb{R}$ بتوجيه من جدول التغيرات والانتباه إلى الفروع اللانهائية .



التمرين59

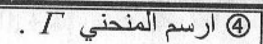
لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=(2x^3-4x^2)e^{-x}$.

Γ المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.(وحدة الرسم : $1\ cm$)

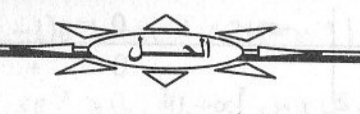
① عين نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$.

② احسب $f'(x)$ وبين أن $f'(x)=2x(-x^2+5x-4)e^{-x}$.

③ أنجز جدول تغيرات الدالة f .



④ ارسم المنحني Γ .



① حساب النهايتين

$\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$

❀ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(2x^3-4x^2\right)\times\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = -\infty$

❀ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(2x^3e^{-x}-4x^2e^{-x}\right) = 0$

❀ الاستنتاج البياني :

• بما أن $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = +\infty$ فإن للمنحني فرعا من قطع مكافئ , عند $-\infty$, في اتجاه محور التراتيب.

• بما أن $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ فإن للمنحني مستقيما مقاربا أفقيا هو محور التراتيب .

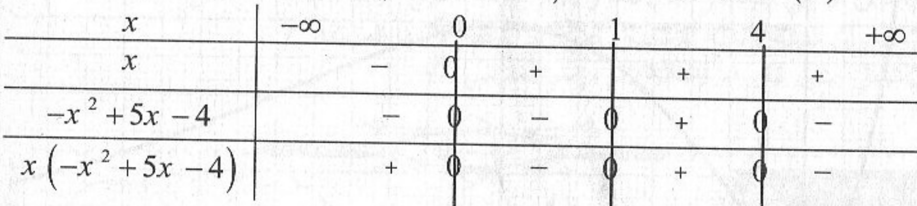
② الدالة المشتقة للدالة f

❀ الدالة المشتقة :

من أجل كل x من $\mathbb{R}$, $f'(x) = \left(6x^2-8x\right)e^{-x} + -\left(2x^3-4x^2\right)e^{-x}$

$$= \left(-2x^3+10x^2-8x\right)e^{-x} = 2x\left(-x^2+5x-4\right)e^{-x}$$

وإشارة $f'(x)$, إذن , من إشارة $x\left(-x^2+5x-4\right)$.



x	$-\infty$		0		1		4		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$-x^2+5x-4$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$x\left(-x^2+5x-4\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

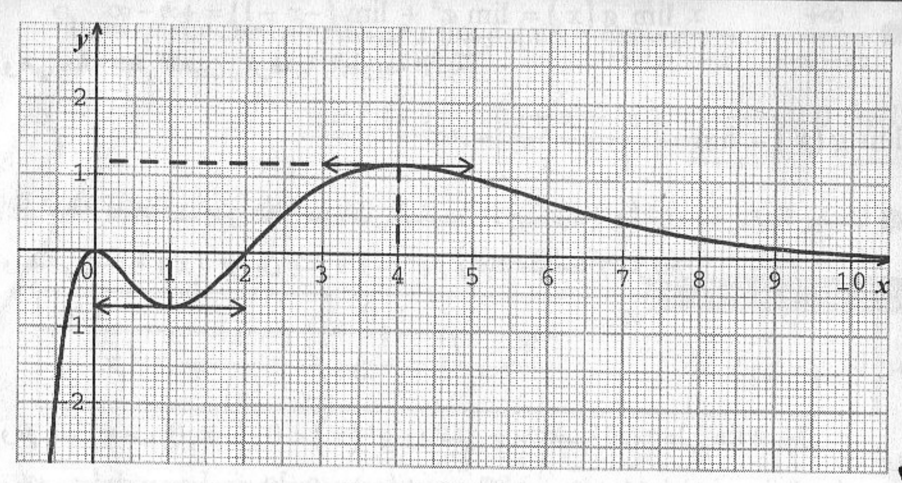
③ جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		0		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\frac{2}{e}$	↗	$\frac{64}{e^4}$	↘	0

④ رسم المنحني Γ : وخطواته هي :

• نرسم النقط : $(0,0)$ و $\left(1,-\frac{2}{e}\right)$ و $\left(4,\frac{64}{e^4}\right)$ (بملاحظة جدول التغيرات) .

• نرسم Γ على المجال $\mathbb{R}$ بتوجيه من جدول التغيرات والانتباه إلى الفروع اللانهائية .



التمرين 60

لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\frac{x}{e^x-x}$.

Γ المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$.

(وحدة الرسم هي: $2\ cm$ على محور الفواصل و $5\ cm$ على محور التراتيب)

1) لتكن g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=e^x-x-1$.

① ادرس تغيرات g على $\mathbb{R}$. استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

② بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$, $\left(e^x-x\right)$ موجب تماما .

2) ① عين نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$. فسر , بيانيا , هذه النتائج.

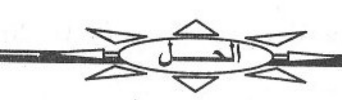
② احسب $f'(x)$

③ ادرس تغيرات الدالة f ثم أنجز جدول تغيراتها.

④ عين معادلة للمماس T للمنحني Γ في النقطة ذات الفاصلة 0.

⑤ باستعمال الجزء 1) , ادرس وضعية المنحني Γ بالنسبة إلى المستقيم T .

⑥ ارسم المستقيم T والمنحني Γ .



① دراسة تغيرات الدالة g

❀ حساب النهايتين

○ $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} e^x + \lim_{x\to-\infty}(-x-1) = +\infty$

○ $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} e^x + \lim_{x\to+\infty}(-x-1) = +\infty-\infty$

وهي حالة عدم التعيين , نرفعها بالطريقة الآتية:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - \frac{x+1}{x}\right) = +\infty$$

الدالة المشتقة : من أجل كل x من $\mathbb{R}$, $g'(x)=e^x-1$

وبالتالي إشارة $g'(x)$ من إشارة e^x-1 , وإليك ملخصا لإشارته :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
e^x-1	$-$	0	$+$

ومن أجل x من $]-\infty,0[$, $g'(x)<0$ وبالتالي g متناقصة تماما على هذا المجال.

ومنه من أجل x من $]0,+\infty[$, $g'(x)>0$ وبالتالي g متزايدة تماما على هذا المجال.

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

إشارة $g(x)$ من جدول التغيرات نستنتج إشارة $g(x)$ كما في الجدول الآتي

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$+$

③ (e^x-x) موجب تماما على $\mathbb{R}$.

لدينا من أجل كل x , $g(x)>0$ أي $e^x-x-1>0$ وهذا يكافئ $e^x-x>1$

وبالتالي (e^x-x) موجب تماما .

2-① حساب نهايتي الدالة f

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^x-x} = \frac{-\infty}{+\infty}$ وهي حالة عدم تعيين نرفعها بالطريقة الآتية:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^x-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\frac{e^x}{x}-1} = -1$$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x-x} = \frac{+\infty}{+\infty-\infty}$ وهي حالة عدم تعيين نرفعها بالطريقة الآتية: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x-x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^x}{x}-1} = 0$.

التفسير البياني لهذه النتائج : للمنحني Γ مستقيمان مقاربان أفقيان , معادلتاهما $y=-1$ و $y=0$ (محور الفواصل) .

② الدالة المشتقة للدالة f

من أجل كل x من $\mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{e^x-x-x(e^x-1)}{(e^x-x)^2} = \frac{(1-x)e^x}{(e^x-x)^2}$$

وإشارة $f'(x)$, إذن , من إشارة $(1-x)$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$1-x$	$+$	0	$-$

ومنه , من أجل كل x من $]-\infty,0[$, $f'(x)>0$, الدالة f متزايدة تماما .

ومن أجل كل x من $]0,+\infty[$, $f'(x)<0$, الدالة f متناقصة تماما.

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	-1 ↗	$\frac{1}{e-1}$	↘ 0

④ المماس T نحسب : $f(0)=0$, $f'(0)=1$

نعوض في المعادلة $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ فنجد $y=x$

⑤ وضعية Γ بالنسبة إلى T

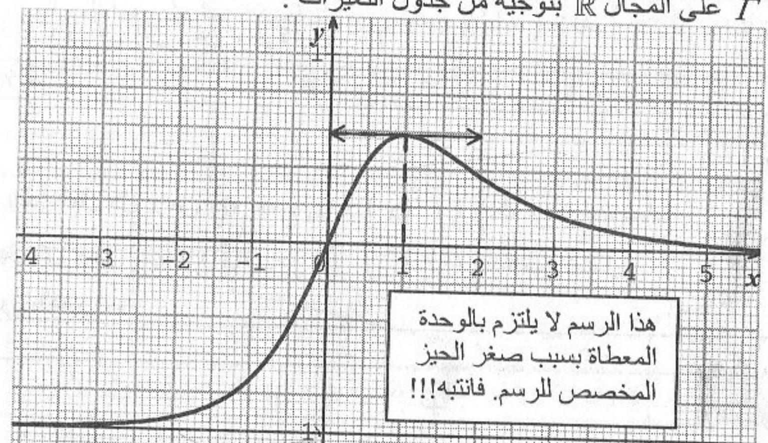
من أجل كل x من $\mathbb{R}$, $f(x)-x = \frac{-x(e^x-x-1)}{e^x-x}$

نعلم من **(1)** أن : من أجل كل x من $\mathbb{R}$, $e^x-x-1>0$ و $e^x-x>0$

ومنه إشارة $f(x)-x$, إذن , من إشارة $(-x)$ وبالتالي

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-x$	$+$	0	$-$
الوضعية	Δ فوق Γ	Γ يقطع Δ	Γ تحت Δ

⑥ رسم المنحني Γ : وخطواته هي :
- نرسم المعلم مع الالتزام بالوحدة المعطاة.
- نرسم , فقط , المستقيم المقارب الذي معادلته $x = -1$ أما المقارب الآخر فهو مرسوم.
- نرسم النقطة : $\left(1, \frac{1}{e-1}\right)$ (بملاحظة جدول التغيرات) .
- نرسم Γ على المجال $\mathbb{R}$ بتوجيه من جدول التغيرات .



التمرين 61

لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$.

Γ المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. (وحدة الرسم هي: $5\ cm$)

① بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$.

② عين نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$. فسر , بيانيا , هذه النتائج.

③ من أجل كل عدد حقيقي x , احسب $f'(x)$.

④ادرس تغيرات الدالة f ثم أنجز جدول تغيراتها.

⑤ارسم المنحني Γ .

الحل

① $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$

بضرب بسط ومقام الكسر $\frac{1}{1+e^{-x}}$ في e^x نحصل على $\frac{e^x}{1+e^x}$ وبالتالي :

من أجل كل x من $\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$.

② حساب نهايتي الدالة f

❁ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+e^{-x}} = 0$

❁ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+e^{-x}} = 1$

❁ التفسير البياني لهذه النتائج : للمنحني Γ مستقيمان مقاربان أفقيان , معادلتاهما $x = 1$ و $x = 0$ (محور الفواصل) .

③ الدالة المشتقة للدالة f من أجل كل x من $\mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}$

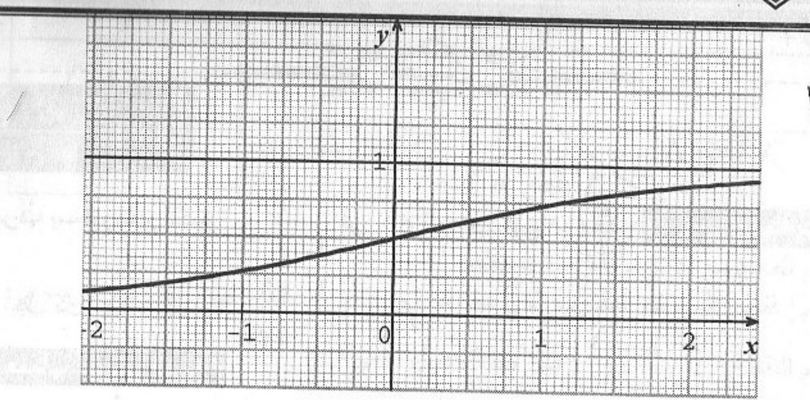
④ دراسة تغيرات الدالة f

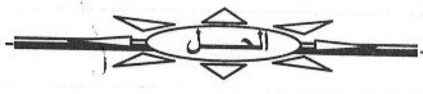
إشارة $f'(x)$, إذن , موجبة تماما , وبالتالي : الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

❁ جدول التغيرات :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	0 ↗	1

⑥ رسم المنحني Γ : وخطواته هي :
- نرسم المعلم مع الالتزام بالوحدة المعطاة.
- نرسم , فقط , المستقيم المقارب الذي معادلته $x = 1$ أما المقارب الآخر فهو مرسوم.
- نرسم Γ على المجال $\mathbb{R}$ بتوجيه من جدول التغيرات .





التمرين62

لتكن f دالة معرفة على $]0,+\infty[$ كما يلي: $f(x)=xe^{-x+2}$.

① أنجز جدول تغيرات الدالة f وعين المستقيمات المقاربة للمنحني الممثل لها.

② ارسم على الآلة الحاسبة البيانية منحنيي الدالتين f و الدالة اللوغاريتمية النيبيرية الذي نرمز إليه بالرمز Γ. استنتج من هذا الرسم عدد حلول المعادلة $f(x)=\ln x$ على المجال $]1,+\infty[$

③ بين أن الدالة g المعرفة على $]0,+\infty[$ كما يلي: $g(x)=\ln x-f(x)$ متزايدة تماما على المجال $]1,+\infty[$.

استنتج أن المعادلة $f(x)=\ln x$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]1,+\infty[$.

④ عين قيمة تقريبية لـ α بتقريب 10^{-3}.

الحل

① جدول تغيرات الدالة f

حساب نهاية f عند $+\infty$

- $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{-x+2}\right)\left[(-x+2)e^{-x+2}\right]=-1\times 0=0$

الاستنتاج البياني:

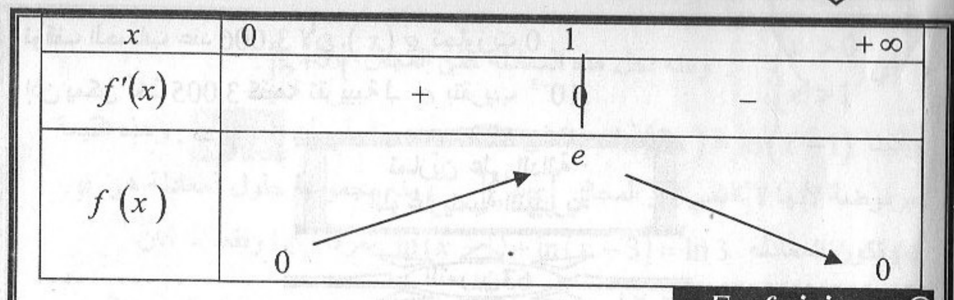
- بما أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ فإن للمنحني مستقيما مقاربا أفقيا هو محور التراتيب.

الدالة المشتقة:

من أجل كل x من $]0,+\infty[$ ، $f'(x)=e^{-x+2}-xe^{-x+2}=(1-x)e^{-x+2}$

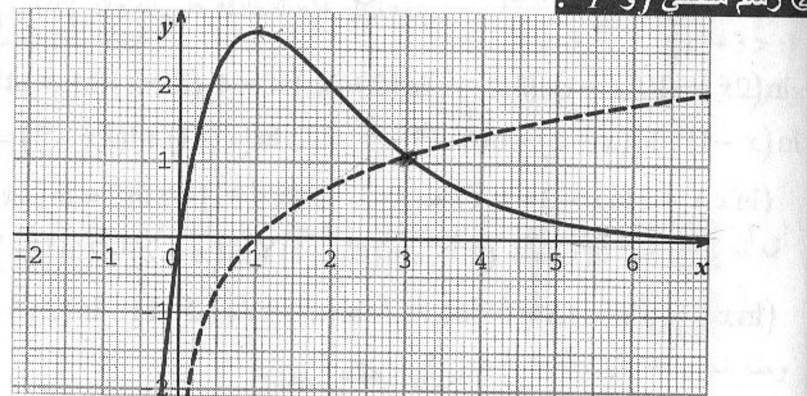
وإشارة $f'(x)$ ، إذن ، من إشارة $1-x$.

جدول التغيرات:



x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	0 ↗	e	↘ 0

② رسم منحني f و Γ :



نستنتج ، من هذا الرسم ، عدد حلول المعادلة $f(x)=\ln x$ على المجال $]1,+\infty[$ هو 1.

③ تغيرات الدالة g من الرسم نستنتج أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]1,+\infty[$ وبالتالي الدالة $(-f)$ متزايدة تماما على هذا المجال. ونستنتج ، أيضا ، أن الدالة $x\mapsto \ln x$ متزايدة على المجال $]1,+\infty[$. وبما أن الدالة g هي مجموع الدالتين $(-f)$ و $x\mapsto \ln x$ المتزايدتين تماما على $]1,+\infty[$ ، فإن **g متزايدة تماما على هذا المجال** .

المعادلة $f(x)=\ln x$ تكافئ $\ln x-f(x)=0$ أي أن $g(x)=\ln x-f(x)$

وبما أن الدالة g مستمرة ورتيبة تماما على المجال $]1,+\infty[$ و $g(1)<0$ فإن للمعادلة $f(x)=\ln x$ حلا وحيدا α في المجال $]1,+\infty[$.

④ قيمة تقريبية لـ α

من أجل تعيين قيمة لـ α ، نمسح المجال $[3,3.5]$ ، مثلا ، بخطوة قدرها 10^{-3} كالآتي :

x	3	3.001	3.002	3.003	3.004	3.005	3.006
$g(x)$	-0.005	-0.004	-0.003	-0.002	-0.001	0.000	0.001

نوقف الحساب عند 3.006 لأن $g(x)$ تجاوزت 0 .

إذن يمكن أخذ 3.005 كقيمة تقريبية لـ α بتقريب 10^{-3}.

تمارين على الدالة اللوغاريتمية النيبيرية

التمرين63

حل $\mathbb{R}$ المعادلات الآتية :

1) $\ln(x+1)=0$ ، 2) $\ln(2-3x)=\ln 4$ ، 3) $\ln(2x)=\ln(x-1)$

4) $\ln(x-1)+\ln(x-3)=\ln 3$ ، 5) $\ln(x-1)+\ln(x-2)=\ln 6$

6) $\ln(x^2-1)+2\ln 2=\ln(4x-1)$ ، 7) $(\ln x)^2-2\ln x-3=0$

8) $\ln(4x+1)+\ln(x+2)-2\ln(3x)=0$ ، 9) $\ln x=4$

10) $\ln(2x)=5$ ، 11) $\ln(x+1)=-2$ ، 12) $(\ln x)^2-6\ln x+8=0$

الحل

1) تكون المعادلة $\ln(x+1)=0$ معرفة إذا وفقط إذا كان $x+1>0$ أي $x>-1$

ومنه نحل هذه المعادلة على المجال $]-1,+\infty[$.

ولدينا $\ln(x+1)=0$ تكافئ $\ln(x+1)=\ln 1$

تكافئ $x+1=1$ أي أن $x=0$.

وهي قيمة تنتمي إلى المجال $]-1,+\infty[$ ومنه مجموعة حلول المعادلة هي $\{0\}$.

2) تكون المعادلة $\ln(2-3x)=\ln 4$ معرفة إذا وفقط إذا كان $2-3x>0$

أي $x<\frac{2}{3}$. ومنه نحل هذه المعادلة على المجال $\left]-\infty,\frac{2}{3}\right[$.

ولدينا $\ln(2-3x)=\ln 4$ تكافئ $2-3x=4$ أي أن $x=-\frac{2}{3}$.

وهي قيمة تنتمي إلى المجال $\left]-\infty,\frac{2}{3}\right[$ ومنه مجموعة حلول المعادلة هي $\left\{-\frac{2}{3}\right\}$.

3) تكون المعادلة $\ln(2x)=\ln(x-1)$ معرفة إذا وفقط إذا كان $\begin{cases}2x>0\\x-1>0\end{cases}$

أي $\begin{cases}x>0\\x>1\end{cases}$. ومنه نحل هذه المعادلة على المجال $]1,+\infty[$.

ولدينا $\ln(2x)=\ln(x-1)$ تكافئ $2x=x-1$ أي أن $x=-1$, وهذه القيمة مرفوضة لأنها لا تنتمي إلى المجال $]1,+\infty[$, ومنه مجموعة حلول المعادلة هي ϕ .

4) تكون المعادلة $\ln(x-1)+\ln(x-3)=\ln 3$ معرفة إذا وفقط إذا كان

$\begin{cases}x-1>0\\x-3>0\end{cases}$ أي $\begin{cases}x>1\\x>3\end{cases}$. ومنه نحل هذه المعادلة على المجال $]3,+\infty[$.

ولدينا $\ln(x-1)+\ln(x-3)=\ln 3$ تكافئ $\ln(x-1)(x-3)=\ln 3$.

تكافئ $(x-1)(x-3)=3$.

تكافئ $x^2-4x=0$.

أي أن $x=0$ (وهذه القيمة مرفوضة لأنها لا تنتمي إلى المجال $]3,+\infty[$).

أو $x=4$ (وهي قيمة تنتمي إلى المجال $]3,+\infty[$) .

ومنه مجموعة حلول المعادلة هي $\{4\}$.

5) تكون المعادلة $\ln(x-1)+\ln(x-2)=\ln 6$ معرفة إذا وفقط إذا كان

$\begin{cases}x-1>0\\x-2>0\end{cases}$ أي $\begin{cases}x>1\\x>2\end{cases}$. ومنه نحل هذه المعادلة على المجال $]2,+\infty[$.

ولدينا $\ln(x-1)+\ln(x-2)=\ln 6$ تكافئ $\ln(x-1)(x-2)=\ln 6$.

تكافئ $(x-1)(x-2)=6$.

تكافئ $x^2-3x-4=0$.

أي أن $x=-1$ (وهذه القيمة مرفوضة لأنها لا تنتمي إلى المجال $]2,+\infty[$).

أو $x=4$ (وهي قيمة تنتمي إلى المجال $]2,+\infty[$) .

ومنه مجموعة حلول المعادلة هي $\{4\}$.

6) تكون المعادلة $\ln(x^2-1)+2\ln 2=\ln(4x-1)$ معرفة إذا وفقط إذا كان

$\begin{cases}x^2-1>0\\4x-1>0\end{cases}$ أي $\begin{cases}x^2-1>0\\x>\frac{1}{4}\end{cases}$. ومنه نحل هذه المعادلة على المجال $]1,+\infty[$.

ولدينا $\ln(x^2-1)+2\ln 2=\ln(4x-1)$ تكافئ $\ln 4(x^2-1)=\ln(4x-1)$.

$\ln 4\left(x^{2}-1\right)=\ln (4x-1)$ تكافئ $4x^{2}-4=4x-1$.

أي أن $4x^{2}-4x-3=0$

أي أن $x=-\dfrac{1}{2}$ (وهذه القيمة مرفوضة لأنها لا تنتمي إلى المجال $]1,+\infty[$).

أو $x=\dfrac{3}{2}$ (وهي قيمة تنتمي إلى المجال $]1,+\infty[$) .

ومنه مجموعة حلول المعادلة هي $\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$.

7) لنحل المعادلة $(\ln x)^{2}+-2\ln x-3=0$ على المجال $]0,+\infty[$.

نضع $X=\ln x$ وبالتالي :

المعادلة $(\ln x)^{2}-2\ln x-3=0$ تكافئ $\begin{cases} X=\ln x \\ X^{2}-2X-3=0 \end{cases}$

المعادلة $X^{2}-2X-3=0$ تكافئ $X=-1$ أو $X=3$.

- من أجل $X=-1$, $X=\ln x$ تكافئ $\ln x=-1$ أي أن $x=\dfrac{1}{e}$.
- من أجل $X=3$, $X=\ln x$ تكافئ $\ln x=3$ أي أن $x=e^{3}$.

إذن مجموعة الحلول هي $\left\{\dfrac{1}{e},e^{3}\right\}$.

8) المعادلة $\ln(4x+1)+\ln(x+2)-2\ln(3x)=0$ معرفة إذا وفقط إذا كان

$\begin{cases} 4x+1>0 \\ x+2>0 \\ 3x>0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} x>-\dfrac{1}{4} \\ x>-2 \\ x>0 \end{cases}$. ومنه نحل هذه المعادلة على المجال $]0,+\infty[$.

ولدينا المعادلة (8) تكافئ $\ln(4x+1)(x+2)=\ln 9x^{2}$.

تكافئ $(4x+1)(x+2)=9x^{2}$.

تكافئ $5x^{2}-9x-2=0$.

أي أن $x=-\dfrac{1}{5}$ (وهذه القيمة مرفوضة لأنها لا تنتمي إلى المجال $]0,+\infty[$).

أو $x=2$ (وهي قيمة تنتمي إلى المجال $]0,+\infty[$) .

ومنه مجموعة حلول المعادلة هي $\{2\}$.

9) لنحل المعادلة $\ln x=4$ على المجال $]0,+\infty[$.

ولدينا المعادلة (9) تكافئ $x=e^{4}$. ومنه مجموعة حلول المعادلة هي $\{e^{4}\}$.

10) لنحل المعادلة $\ln(2x)=5$ على المجال $]0,+\infty[$.

ولدينا المعادلة (10) تكافئ $2x=e^{5}$ أي أن $x=\dfrac{e^{5}}{2}$

ومنه مجموعة حلول المعادلة هي $\left\{\dfrac{e^{5}}{2}\right\}$.

11) لنحل المعادلة $\ln(x+1)=-2$ على المجال $]-1,+\infty[$.

ولدينا المعادلة (11) تكافئ $x+1=\dfrac{1}{e^{2}}$ أي أن $x=\dfrac{1}{e^{2}}-1$

ومنه مجموعة حلول المعادلة هي $\left\{\dfrac{1}{e^{2}}-1\right\}$.

12) لنحل المعادلة $(\ln x)^{2}-6\ln x+8=0$ على المجال $]0,+\infty[$.

نضع $X=\ln x$ وبالتالي :

المعادلة $(\ln x)^{2}-6\ln x+8=0$ تكافئ $\begin{cases} X=\ln x \\ X^{2}-6X+8=0 \end{cases}$

المعادلة $X^{2}-6X+8=0$ تكافئ $X=2$ أو $X=4$.

- من أجل $X=2$, $X=\ln x$ تكافئ $\ln x=2$ أي أن $x=e^{2}$.
- من أجل $X=4$, $X=\ln x$ تكافئ $\ln x=4$ أي أن $x=e^{4}$.

إذن مجموعة الحلول هي $\{e^{2},e^{4}\}$.

التمرين 64

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات الآتية :

1) $\ln(x+1)\leq 0$ ، 2) $\ln(2-3x)<\ln 4$ ، 3) $1+\ln x\geq 0$

4) $\ln(2-x)\geq 0$ ، 5) $\ln(x-1)+\ln(x-2)>\ln 6$

الحل

1) تكون المتراجحة $\ln(x+1) \le 0$ معرفة إذا وفقط إذا كان $x+1>0$ أي $x>-1$

ومنه نحل هذه المتراجحة على المجال $]-1,+\infty[$.

ولدينا $\ln(x+1) \le 0$ تكافئ $\ln(x+1) \le \ln 1$

تكافئ $x+1 \le 1$ أي أن $x \in]-\infty,0]$.

ومنه مجموعة حلول المتراجحة هي $]-\infty,0] \cap]-1,+\infty[=]-1,0]$.

2) تكون المتراجحة $\ln(2-3x) < \ln 4$ معرفة إذا وفقط إذا كان $2-3x>0$

أي $x<\frac{2}{3}$ ومنه نحل هذه المتراجحة على المجال $\left]-\infty,\frac{2}{3}\right[$.

ولدينا $\ln(2-3x) < \ln 4$ تكافئ $2-3x<4$

تكافئ $x>-\frac{2}{3}$ أي أن $x \in \left]-\frac{2}{3},+\infty\right[$.

ومنه مجموعة حلول المتراجحة هي $\left]-\infty,\frac{2}{3}\right[\cap \left]-\frac{2}{3},+\infty\right[= \left]-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right[$

3) نحل المتراجحة $1+\ln x \ge 0$ في $]0,+\infty[$

المتراجحة **(3)** تكافئ $\ln x \ge -1$

تكافئ $\ln x \ge \ln e^{-1}$

تكافئ $x \ge \frac{1}{e}$ أي أن $x \in \left[\frac{1}{e},+\infty\right[$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة هي $]0,+\infty[\cap \left[\frac{1}{e},+\infty\right[= \left[\frac{1}{e},+\infty\right[$.

4) تكون المتراجحة $\ln(2-x) \ge 0$ معرفة إذا وفقط إذا كان $2-x>0$ أي $x<2$

ومنه نحل هذه المتراجحة على المجال $]-\infty,2[$.

ولدينا $\ln(2-x) \ge 0$ تكافئ $\ln(2-x) \ge \ln 1$

تكافئ $2-x \ge 1$ أي أن $x \in]-\infty,1]$.

ومنه مجموعة حلول المتراجحة هي $]-\infty,1] \cap]-\infty,2[=]-\infty,1]$.

5) تكون المتراجحة $\ln(x-1)+\ln(x-2) > \ln 6$ معرفة إذا وفقط إذا كان $\begin{cases} x-1>0 \\ x-2>0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} x>1 \\ x>2 \end{cases}$. ومنه نحل هذه المتراجحة على المجال $]2,+\infty[$.

ولدينا $\ln(x-1)+\ln(x-2) > \ln 6$ تكافئ $\ln(x-1)(x-2) > \ln 6$.

تكافئ $(x-1)(x-2) > 6$.

تكافئ $x^2-3x-4>0$.

أي أن $x \in]-\infty,-1[\cup]4,+\infty[$

ومنه مجموعة حلول المعادلة هي $]4,+\infty[=]2,+\infty[\cap (]-\infty,-1[\cup]4,+\infty[)$.

التمرين 65

لتكن f دالة معرفة على $]0,+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x+\ln x$.

① عين نهايتي الدالة f عند 0 و $+\infty$.

② ادرس تغيرات الدالة f على $]0,+\infty[$.

الحل

① حساب نهايتي الدالة f

- $\lim_{x \to 0^{>}} f(x) = -\infty$ ، لأن $\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ، لأن $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

② دراسة تغيرات الدالة f

- الدالة المشتقة: من أجل كل x من $]0,+\infty[$ ، $f'(x)=1+\frac{1}{x}$

إشارة $f'(x)$ ، إذن ، موجبة تماما ، وبالتالي : الدالة f متزايدة تماما على $]0,+\infty[$.

x	0 $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

التمرين 66

لتكن f دالة معرفة على $]2,+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\ln(x^2-x-2)$.

C_f المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$.

① عين نهايتي الدالة f عند 2 و $+\infty$.

② ادرس تغيرات الدالة f على $]2,+\infty[$.

③ عين إحداثيي نقطة تقاطع C_f مع محور الفواصل.

الحل

① حساب نهايتي الدالة f

• $\lim\limits_{\substack{x \to 2\\ >}} f(x)=-\infty$ ، لأن $\lim\limits_{\substack{x \to 2\\ >}} (x^2-x-2)=0^+$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2-x-2)=+\infty$

② دراسة تغيرات الدالة f

• الدالة المشتقة: من أجل كل x من $]2,+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-x-2}$

إشارة $f'(x)$، إذن، موجبة تماما، وبالتالي: الدالة f متزايدة تماما على $]2,+\infty[$.

x	2 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$



التمرين 67

لتكن f دالة معرفة على $]0,+\infty[$ كما يلي: $f(x)=-x+2+\ln x$.

C_f المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$.

① عين نهايتي الدالة f عند 0 و $+\infty$.

② ادرس تغيرات الدالة f على $]0,+\infty[$.

③ بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_0 في $]1,+\infty[$.

تحقق من أن $3.1<x_0<3.2$.



الحل

① حساب نهايتي الدالة f

• $\lim\limits_{\substack{x \to 0\\ >}} f(x)=-\infty$ ، لأن $\lim\limits_{\substack{x \to 0\\ >}} \ln x=-\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty+\infty$ وهي حالة عدم تعيين نرفعها بالطريقة الآتية:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x\left(-1+\frac{2}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)=-\infty \text{ ، لأن } \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$$

② دراسة تغيرات الدالة f

• الدالة المشتقة: من أجل كل x من $]0,+\infty[$ ، $f'(x)=-1+\dfrac{1}{x}=\dfrac{-x+1}{x}$

إشارة $f'(x)$، إذن، من إشارة $-x+1$ وبالتالي:

الدالة f متزايدة تماما على $]0,1[$ و متناقصة تماما على $]1,+\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$

③ المعادلة $f(x)=0$

بما أن الدالة f مستمرة ورتيبة تماما (متناقصة تماما) على $]1,+\infty[$ و $0\in f(]1,+\infty[)$ ، فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_0 في $]1,+\infty[$.

وبما أن $f(3.2)=-0.04$ و $f(3.1)=0.03$ ، أي أن $f(3.1)\times f(3.2)<0$

فإن $3.1<x_0<3.2$.



التمرين 68

لتكن f دالة معرفة على $]0,+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x\ln x-x$.

C_f المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$.

① عين نهايتي الدالة f عند 0 و $+\infty$.

② ادرس تغيرات الدالة f على $]0,+\infty[$.

③ حل في $]0,+\infty[$ المتراجحة $f(x) \leq 0$.



① حساب نهايتي الدالة f

• $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$, لأن $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x \ln x = 0$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty - \infty$ وهي حالة عدم تعيين نرفعها بالطريقة الآتية:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x(\ln x - 1) = +\infty$$

② دراسة تغيرات الدالة f

• الدالة المشتقة: من أجل كل x من $]0,+\infty[$, $f'(x) = \ln x$

إشارة $f'(x)$, إذن , من إشارة $\ln x$ وبالتالي :

الدالة f متناقصة تماما على $]0,1[$ و متزايدة تماما على $]1,+\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

③ المتراجحة $f(x) \leq 0$

من أجل x من $]0,+\infty[$, $f(x) \leq 0$ تكافئ $x \ln x - x \leq 0$

تكافئ $x(\ln x - 1) \leq 0$

إشارة $x(\ln x - 1)$ من إشارة $(\ln x - 1)$ هي :

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$		$-$	0	$+$	

ومن مجموعة حلول المتراجحة $f(x) \leq 0$ هي $]0,1[$.



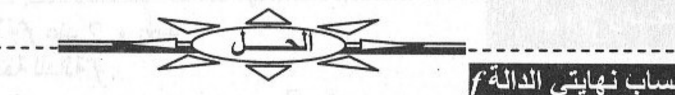
لتكن f دالة معرفة على $]0,+\infty[$ كما يلي : $f(x) = 8\ln x - 3x + \frac{4}{x}$.

C_f المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$.

① عين نهايتي الدالة f عند 0 و $+\infty$.

② ادرس تغيرات الدالة f على $]0,+\infty[$.

③ عين معادلة للمستقيم T مماس المنحني C_f في النقطة التي فاصلتها 2 .



① حساب نهايتي الدالة f

• $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty + \infty$ وهي حالة عدم تعيين نرفعها بالطريقة الآتية:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x}\left(8x\ln x - 3x^2 + 4\right) = +\infty$$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty - \infty$ وهي حالة عدم تعيين,أيضا, نرفعها بالطريقة الآتية:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x\left(8\frac{\ln x}{x} - 3 + \frac{4}{x^2}\right) = -\infty$$

② دراسة تغيرات الدالة f

• الدالة المشتقة:

من أجل كل x من $]0,+\infty[$, $f'(x) = \frac{8}{x} - 3 - \frac{4}{x^2} = \frac{-3x^2 + 8x - 4}{x^2}$

إشارة $f'(x)$, إذن , من إشارة $-3x^2 + 8x - 4$ وبالتالي :

الدالة f متناقصة تماما على $]2,+\infty[\cup \left]0,\frac{2}{3}\right[$ و متزايدة تماما على $\left]\frac{2}{3},2\right[$.

x	0		$\frac{2}{3}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$8\ln\frac{2}{3}+4 \cong 0.75$	↗	$8\ln 2 - 4 \cong 0.5$	↘	$-\infty$

③ المماس T نحسب : $f'(1) = 1$, $f(1) = 1$

نعوض في المعادلة $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ فنجد $y=x$

التمرين 70

لتكن f دالة معرفة على $]2,+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{1}{x-2}+\ln x$.

C_f المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$.

① عين نهايتي الدالة f عند 2 و $+\infty$.

② عين الدالة المشتقة للدالة f.

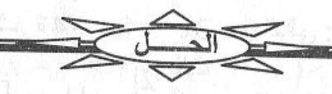
- بين أنه من أجل كل x من $]2,+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{x^2-5x+4}{x(x-2)^2}$
- ادرس تغيرات الدالة f على $]2,+\infty[$.

③ لتكن g الدالة المعرفة على $]2,+\infty[$ كما يلي : $g(x)=\ln x$.

C_g المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$.

- بين أن المنحنيين C_f و C_g متقاربان.
- ادرس الوضعية النسبية لهما على $]2,+\infty[$.

④ بين أن الدالة h المعرفة كما يلي : $h(x)=\ln(x-2)+x(\ln x-1)$ هي دالة أصلية للدالة f على $g(x)=\ln x$ على $]2,+\infty[$.



الحل

① حساب نهايتي الدالة f

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x)=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

② دراسة تغيرات الدالة f

- الدالة المشتقة:

من أجل كل x من $]2,+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{-1}{(x-2)^2}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{x^2-5x+4}{x(x-2)^2}$

إشارة $f'(x)$ ، إذن ، من إشارة x^2-5x+4 وبالتالي :

الدالة f متزايدة تماما على $]2,1[\cup]4,+\infty[$ و متناقصة تماما على $]1,4[$.

x	2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{1}{2}+\ln 4$	↗	$+\infty$

③ المنحنيان C_f و C_g

بما أن $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-\ln x]=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x-2}=0$ فإن C_g يقارب C_f .

وبما أن: من أجل كل x من $]2,+\infty[$ $f(x)-\ln x=\dfrac{1}{x-2}>0$

فإن C_f يقع فوق C_g .

④ دالة أصلية للدالة f

بما أن الدالة h قابلة للاشتقاق على $]2,+\infty[$ ولدينا $h'(x)=\dfrac{1}{x-2}+\ln x=f(x)$

فإن h دالة أصلية للدالة f على $]2,+\infty[$.

التمرين 71

① لتكن g دالة معرفة على $]0,+\infty[$ كما يلي : $g(x)=x^3-1+\ln x$.

- ادرس تغيرات الدالة g على $]0,+\infty[$. (لايطلب حساب النهايتين)
- احسب $g(1)$. استنتج إشارة $g(x)$ على $]0,+\infty[$.

② لتكن f دالة معرفة على $]0,+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{\ln x}{x}$.

C_f المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$.

- عين نهايتي الدالة f عند 0 و $+\infty$.
- عين الدالة المشتقة للدالة f.
- ادرس, باستعمال الجزء① , تغيرات الدالة f على $]0,+\infty[$.

③ لتكن h الدالة المعرفة على $]0,+\infty[$ كما يلي : $h(x)=\dfrac{1}{2}x^2$.

C_h المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$.

- بين أن المنحنيين C_f و C_h متقاربان.
- ادرس الوضعية النسبية لهما على $]0,+\infty[$.



①

- الدالة المشتقة:

من أجل كل x من $]0,+\infty[$ ، $g'(x)=3x^2+\frac{1}{x}$

إشارة $f'(x)$ ، إذن ، موجبة تماما ، وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على $]0,+\infty[$.

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	↗	

- $g(1)=0$ ، وإشارة $g(x)$ ، إذن ، هي :

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$		−	0	+	

②

- $\lim_{x\to 0^{>}} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
- الدالة المشتقة:

من أجل كل x من $]0,+\infty[$ ، $f'(x)=x-\frac{1-\ln x}{x^2}=\frac{x^3-1+\ln x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$

إذن ، إشارة $f'(x)$ من إشارة $g'(x)$ ، وبالتالي جدول تغيرات f هو

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{1}{2}$	↗	$+\infty$

③

بما أن $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\frac{1}{2}x^2\right]=\lim_{x\to+\infty}-\frac{\ln x}{x}=0$ فإن C_h يقارب C_f .

وبما أن: من أجل كل x من $]0,+\infty[$ $f(x)-\frac{1}{2}x^2=-\frac{\ln x}{x}$

x	0	1	$+\infty$
$f(x)-\frac{1}{2}x^2$	+	0	−
الوضعية	C_h فوق C_f	C_h يقطع C_f	C_h تحت C_f

التمرين 72

لتكن f دالة معرفة على $]0,+\infty[$ كما يلي : $f(x)=3-2x-\ln x$.

C_f المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$.

① ادرس نهايتي f عند 0 وعند $+\infty$.

② ادرس تغيرات الدالة f على $]0,+\infty[$.

③ أعط معادلة للمستقيم T مماس المنحني C_f عند النقطة التي فاصلتها 1.

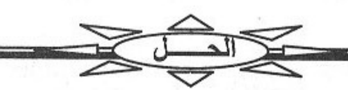
④ ادرس الوضعية النسبية للمنحني C_f والمستقيم Δ ذي المعادلة $y=3-2x$

⑤ بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0,+\infty[$.

- تحقق من أن $1.3<\alpha<1.4$.
- عين قيمة تقريبية لـ α بتقريب 0.01 .

⑥ لتكن g دالة معرفة على $]0,+\infty[$ كما يلي : $g(x)=x-x\ln x$.

- اشتق الدالة g.
- استنتج الدوال الأصلية للدالة f على $]0,+\infty[$.



① نهايتا الدالة f

- $\lim_{x\to 0^{>}} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

② تغيرات الدالة f

- الدالة المشتقة:

من أجل كل x من $]0,+\infty[$ ، $f'(x)=-2-\frac{1}{x}$

إذن ، إشارة ، $f'(x)$ سالبة تماما وبالتالي الدالة f متناقصة تماما على $]0,+\infty[$

ومنه جدول تغيرات f هو

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

③ معادلة المماس T نحسب : $f(1)=1$ ، $f'(1)=-3$

نعوض في المعادلة (1) $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ فنجد $y=-3x+4$

④ وضعية C_f بالنسبة إلى Δ

بما أن: من أجل كل x من $]0,+\infty[$ $f(x)-(3-2x)=-\ln x$

x	0	1	$+\infty$
$f(x)-\frac{1}{2}x^2$	$+$	0	$-$
الوضعية	Δ فوق C_f	Δ يقطع C_f	Δ تحت C_f

⑤ المعادلة $f(x)=0$

• بما أن الدالة f مستمرة ورتيبة تماما (متناقصة تماما) على $]0,+\infty[$ و $0\in f(]0,+\infty[)$

فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_0 في $]0,+\infty[$.

• وبما أن $f(1.4)=-0.13$ و $f(1.3)=0.14$, أي أن $f(1.3)\times f(1.4)<0$

فإن $1.3<\alpha<1.4$.

• من أجل تعيين قيمة لـ α ، نمسح المجال $[1.345,1.400]$, مثلا , بخطوة قدرها 10^{-3} كالآتي :

x	1.345	1.346	1.347	1.348	1.349	1.350	1.351
$f(x)$	0.014	0.011	0.008	0.005	0.003	0.000	-0.003

نوقف الحساب عند 1.350 لأن $f(x)$ تجاوزت 0 .

إذن يمكن أخذ 1.350 كقيمة تقريبية لـ α بتقريب 10^{-3}.

⑥ الدوال الأصلية للدالة f

• من أجل x من $]0,+\infty[$ ، $g'(x)=1-(\ln x+1)=-\ln x$.

• إذن , الدوال $x\mapsto 3x-x^2+(x-x\ln x)+C$

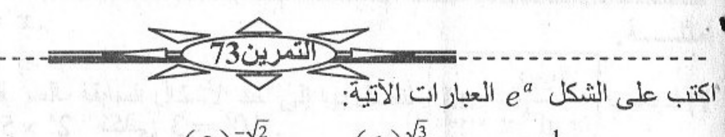
أي $x\mapsto -x^2+4x-x\ln x+C$ هي الدوال الأصلية للدالة f على $]0,+\infty[$.

قوى عدد حقيقي موجب تماما

✿ من أجل كل $a>0$ و $b\in\mathbb{R}$ ، $a^b=e^{b\ln a}$.

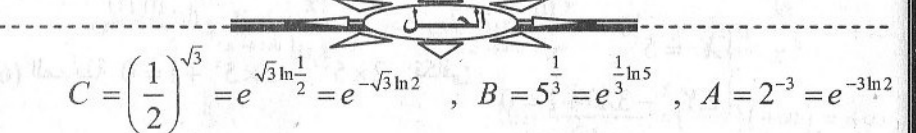
✿ خواص : من أجل كل $a>0$ و $b\in\mathbb{R}$ و $c\in\mathbb{R}$ لدينا

$$a^{-c}=\frac{1}{a^c} \qquad \frac{a^b}{a^c}=a^{b-c} \qquad a^b\times a^c=a^{b+c} \qquad (a^b)^c=a^{b\times c}$$



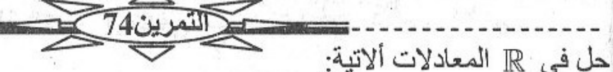
اكتب على الشكل e^a العبارات الآتية:

$$F=\sqrt{3}^{\sqrt{3}},\ E=2^{-e},\ D=\left(\frac{3}{4}\right)^{-\sqrt{2}},\ C=\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}},\ B=5^{\frac{1}{3}},\ A=2^{-3}$$



$$C=\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}=e^{\sqrt{3}\ln\frac{1}{2}}=e^{-\sqrt{3}\ln 2},\quad B=5^{\frac{1}{3}}=e^{\frac{1}{3}\ln 5},\quad A=2^{-3}=e^{-3\ln 2}$$

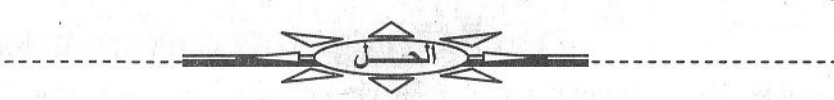
$$F=\sqrt{3}^{\sqrt{3}}=e^{\sqrt{3}\ln\sqrt{3}},\quad E=2^{-e}=e^{-e\ln 2},\quad D=\left(\frac{3}{4}\right)^{-\sqrt{2}}=e^{-\sqrt{2}\ln\frac{3}{4}}$$



حل في $\mathbb{R}$ المعادلات الآتية:

1) $3^x=5$ ، 2) $3^{-x}=6$ ، 3) $0.7^x=3$

4) $2^x=3\times 5^x$ ، 5) $2^x\times 5^x=3$ ، 6) $2\times 5^{2x}-3\times 5^x+1=0$



1) المعادلة $3^x=5$ تكافئ $e^{x\ln 3}=e^{\ln 5}$.

تكافئ $x\ln 3=\ln 5$ ومنه $x=\frac{\ln 5}{\ln 3}$

2) المعادلة $3^{-x}=6$ تكافئ $e^{-x\ln 3}=e^{\ln 6}$.

تكافئ $-x\ln 3=\ln 6$ ومنه $x=-\frac{\ln 6}{\ln 3}$

3) المعادلة $0.7^{x}=3$ تكافئ $e^{x\ln 0.7}=e^{\ln 3}$.

تكافئ $x\ln 0.7=\ln 3$ ومنه $x=\frac{\ln 3}{\ln 0.7}$

4) المعادلة $2^{x}=3\times 5^{x}$ تكافئ $\frac{2^{x}}{5^{x}}=3$

تكافئ $\left(\frac{2}{5}\right)^{x}=3$ أي أن $e^{x\ln\frac{2}{5}}=e^{\ln 3}$

ومنه $x=\frac{\ln 3}{\ln\frac{2}{5}}$.

5) المعادلة $2^{x}\times 5^{x}=3$ تكافئ $10^{x}=3$.

تكافئ $e^{x\ln 10}=e^{\ln 3}$ أي أن $x\ln 10=\ln 3$

ومنه $x=\frac{\ln 3}{\ln 10}$.

6) المعادلة $2\times 5^{2x}-3\times 5^{x}+1=0$ تكافئ $\begin{cases}X=5^{x}\\ 2X^{2}-3X+1=0\end{cases}$.

ومنه المعادلة $2X^{2}-3X+1=0$ تكافئ ($X=1$ أو $X=\frac{1}{2}$).

- من أجل $X=1$, المعادلة $X=5^{x}$ تكافئ $5^{x}=1$ ومنه $x=0$.
- من أجل $X=\frac{1}{2}$, المعادلة $X=5^{x}$ تكافئ $5^{x}=\frac{1}{2}$ أي $e^{x\ln 5}=e^{\ln\frac{1}{2}}$.

ومنه $x=-\frac{\ln 2}{\ln 5}$. وبالتالي مجموعة الحلول هي : $\left\{-\frac{\ln 2}{\ln 5},0\right\}$.

التزايد المقارن للدوال الأسية ودوال القوى واللوغاريتمات:

نستعمل المقارنة بين تزايد الدوال $x\mapsto e^{x}$ و $x\mapsto x^{n}$ و $x\mapsto\ln x$ – على الترتيب – لرفع بعض حالات عدم التعيين التي نصادفها أثناء حساب نهايات الدوال.

لدينا من أجل $n\in\mathbb{N}$,

- $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{n}}=0$ (لأن في اللانهاية تتفوق الدالة " قوة" على الدالة اللوغاريتمية).

- $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x^{n}}=+\infty$ (لأن في اللانهاية تتفوق الدالة الأسية على الدالة " القوة ").
- $\lim_{x\to 0}x^{n}\ln x=0$ (لأن في اللانهاية تتفوق الدالة " قوة" على الدالة اللوغاريتمية).
- $\lim_{x\to-\infty}x^{n}e^{n}=0$ لأن $\lim_{x\to-\infty}x^{n}e^{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^{n}}{e^{-x}}=0$

الخلاصة :

في اللانهاية , تتفوق الدالة الأسية على الدالة " القوة " وتتفوق الدالة " القوة " على الدالة اللوغارتمية .

أمثلة:

1) لنحسب $\lim_{x\to+\infty}\frac{3xe^{x}}{x^{6}\ln x}$. لنصل بها إلى أحد الأشكال السابقة بالطريقة الآتية

$\lim_{x\to+\infty}\frac{3xe^{x}}{x^{6}\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3e^{x}}{x^{6}}\times\frac{x}{\ln x}$ وبتطبيق قواعد التزايد المقارن نتحصل على

$\lim_{x\to+\infty}\frac{3e^{x}}{x^{6}}=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0^{+}$ أي $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x}=+\infty$ والنتيجة هي

$\lim_{x\to+\infty}\frac{3xe^{x}}{x^{6}\ln x}=(+\infty)(+\infty)=+\infty$.

2) لنحسب $\lim_{x\to+\infty}\left(x^{5}-x^{4}\ln x\right)$. لنصل بها إلى أحد الأشكال السابقة بالطريقة الآتية

$\lim_{x\to+\infty}\left(x^{5}-x^{4}\ln x\right)=\lim_{x\to+\infty}x^{5}\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty$.

3) لنحسب $\lim_{x\underset{<}{\to}2}\frac{e^{\frac{1}{x-2}}}{x-2}$. لنصل بها إلى أحد الأشكال السابقة بالطريقة الآتية :

نضع $X=\frac{1}{x-2}$. لدينا $\lim_{x\underset{<}{\to}2}X=-\infty$ وبالتالي $\lim_{x\underset{<}{\to}2}\frac{e^{\frac{1}{x-2}}}{x-2}=\lim_{X\to-\infty}Xe^{X}=0$

الحساب التكاملي: لتكن f دالة مستمرة على مجال $[a,b]$

✿ $\int_a^b f(x)dx = G(b)-G(a)$ ، حيث G دالة أصلية للدالة f على $[a,b]$.

✿ شكل آخر : $\int_a^b f(x)dx = [G(x)]_a^b = G(b)-G(a)$.

مثـــال : لحساب $\int_1^2 -\frac{1}{x^2}dx$ ننجز المراحل الثلاث الآتية :

- نعين دالة أصلية للدالة $x \longmapsto -\frac{1}{x^2}$ على المجال $[1,2]$ ولتكن G حيث $G(x)=\frac{1}{x}$.
- نحسب $G(1)$ و $G(2)$ فنحصل على النتيجتين : $G(1)=1$ و $G(2)=\frac{1}{2}$.
- إذن $\int_1^2 -\frac{1}{x^2}dx = G(2)-G(1) = \frac{1}{2}-1 = -\frac{1}{2}$.

خواص التكامل: f و g دالتان مستمرتان على $[a,b]$ ، c من $[a,b]$.

✿ $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

✿ $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$ (علاقة شال Chasles)

✿ $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ (خطية التكامل)

✿ $\int_a^b (kf)(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

✿ وإذا كان من أجل كل x من $[a,b]$ ، $f(x) \ge g(x)$ فإن
$\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$.

✿ وإذا كان من أجل كل x من $[a,b]$ ، $m \le f(x) \le M$ فإن

$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$. (حصر القيمة المتوسطة للدالة f على $[a,b]$)

التكامل بالتجزئة : u و v دالتا قابلتان للاشتقاق على مجال $[a,b]$ و دالتاهما المشتقتان

مستمرتان على هذا المجال .

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

ملاحظة : إن الهدف من هذا العمل ، هو التخلص من الحد الذي يعيق إيجاد الدالة الأصلية.
فإذا كانت $f(x)$ من الشكل $\sin x$ (كثير حدود) أو من الشكل $\cos x$ (كثير حدود)
يُنصح بوضع $u(x) =$ (كثير الحدود) . كما في المثال الآتي :

$$\int_0^\pi \underbrace{2x}_{u}\,\underbrace{\cos x}_{v'}\,dx = \Big[\underbrace{2x}_{u}\,\underbrace{\sin x}_{v}\Big]_0^\pi - \int_0^\pi \underbrace{2}_{u'}\,\underbrace{\sin x}_{v}\,dx = 0-[-2\cos x]_0^\pi = -4$$

حساب المساحات : f و g دالتان مستمرتان على مجال $[a,b]$ ، المستوي منسوب إلى معلم متعامد .

✿ إذا كان من أجل كل x من $[a,b]$ ، $f(x) \ge g(x)$ فإن $\mathscr{A}$ مساحة الحيز المستوي المحدد بمنحنيي هاتين الدالتين (محصور بينهما) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$ هي $\mathscr{A} = \int_a^b [f(x)-g(x)]dx$ (بوحدة المساحة المعطاة)

مثـــال : المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس .

لتكن f و g دالتين معرفتين كما يلي : $f(x)=-x^2+x$ و $g(x)=x^2-1$

إن مساحة الحيز المستوي المحدد بمنحنيي الدالتين و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=-\frac{1}{2}$ و $x=1$ هي :

$\mathscr{A} = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} [f(x)-g(x)]dx$ (و.م)

ولدينا $\mathscr{A} = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} [f(x)-g(x)]dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} [(-x^2+x)-(x^2-1)]dx$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{1} (-2x^2+x+1)dx = \left[-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-\frac{1}{2}}^{1}$$

$$=\left(-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+1\right)-\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{8}=1.125$$

ومنه مساحة الحيز المستوي هي : (وحدة مساحة) $\mathscr{A}=1.125$.

وإذا كان من أجل كل x من $[a,b]$, $f(x)\geq 0$ فإن مساحة الحيز المستوي المحدد بمنحني الدالة f والمستقيمات التي معادلاتها : $x=a$ و $x=b$ و $y=0$

هي $\mathscr{A}=\int_a^b f(x)dx$ (بوحدة المساحة المعطاة)

مثال المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس (الوحدة هي $1cm$)

لتكن f دالة معرفة كما يلي : $f(x)=x^2$

إن مساحة الحيز المستوي المحدد بمنحني الدالة f والمستقيمات التي معادلاتها :

$x=1$ و $x=2$ و $y=0$ ، هي

$$\mathscr{A}=\int_1^2 x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2$$

$$=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}\cong 2.33\,cm^2$$

وإذا كان من أجل كل x من $[a,b]$, $f(x)\leq 0$ فإن مساحة الحيز المستوي المحدد بمنحني الدالة f والمستقيمات التي معادلاتها : $x=a$ و $x=b$ و $y=0$

هي $\mathscr{A}=-\int_a^b f(x)dx$ (بوحدة المساحة المعطاة)



احسب التكاملات الآتية

1) $\int_2^3 (x^2+1)dx$, 2) $\int_1^2 \left(3x+1+\frac{2}{x}\right)dx$, 3) $\int_0^2 (x-1)\left(\frac{x^2}{2}-x+3\right)dx$

4) $\int_{-1}^0 (2x+1)^3dx$, 5) $\int_{-2}^3 \frac{2x}{(x^2+1)^2}dx$, 6) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{4x}{x^2+1}dx$

7) $\int_{-2}^1 \frac{1}{\sqrt{x+3}}dx$, 8) $\int_0^1 \frac{1}{x^2+2x+1}dx$, 9) $\int_1^2 \frac{2-4x}{\sqrt{x^2-x+3}}dx$

10) $\int_1^e \frac{1}{x}(\ln x)^2dx$, 11) $\int_2^3 \left(x+2+\frac{4}{x-1}\right)dx$, 12) $\int_2^e \frac{1}{x(\ln x)^2}dx$

13) $\int_{-2}^0 \left(1+\frac{3}{2x+1}+\frac{3}{2x-6}\right)dx$, 14) $\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x+1}dx$, 15) $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}dx$

16) $\int_0^{\ln 2} \left(e^x-e^{2x}\right)dx$, 17) $\int_1^2 \frac{e^x+1}{e^x}dx$, 18) $\int_0^{\ln 3} \frac{2e^{3x}-e^x-5}{e^x}dx$

19) $\int_0^1 xe^{-x^2}dx$.

الحل

1) $\int_2^3 (x^2+1)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_2^3=(9+3)-\left(\frac{8}{3}+2\right)=\frac{22}{3}=7.33$.

2) $\int_1^2 \left(3x+1+\frac{2}{x}\right)dx=\left[\frac{3}{2}x^2+x+2\ln x\right]_1^2=(8+2\ln 2)-\left(\frac{3}{2}+1\right)$.

$$=(8+2\ln 2)-\left(\frac{3}{2}+1\right)=6.88$$

3) إذا وضعنا $u(x)=\frac{x^2}{2}-x+3$ ، فإن $u'(x)=x-1$.

إذن $\int_0^2 (x-1)\left(\frac{x^2}{2}-x+3\right)dx=\int_0^2 u'(x)\times u(x)dx=\left[\frac{1}{2}(u(x))^2\right]_0^2$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x^2}{2}-x+3\right)^2\right]_0^2=\frac{1}{2}(9-9)=0$$

4) إذا وضعنا $u(x)=2x+1$ ، فإن $u'(x)=2$.

إذن $\int_{-1}^0 (2x+1)^3dx=\int_{-1}^0 \frac{1}{2}u'(x)\times(u(x))^3dx=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}(u(x))^4\right]_{-1}^0$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}(2x+1)^4\right]_{-1}^0=\frac{1}{8}(1-1)=0$$

5) إذا وضعنا $u(x)=x^2+1$ ، فإن $u'(x)=2x$.

إذن $\int_{-2}^{3}\frac{2x}{(x^2+1)^2}dx = \int_{-2}^{3}\frac{u'(x)}{(u(x))^2}dx = \left[\frac{-1}{u(x)}\right]_{-2}^{3}$

$$= \left[\frac{-1}{x^2+1}\right]_{-2}^{3} = \left(-\frac{1}{10}\right)-\left(\frac{-1}{5}\right)=\frac{1}{10}$$

6) إذا وضعنا $u(x)=x^2+1$ ، فإن $u'(x)=2x$

إذن $\int_0^{\sqrt3}\frac{4x}{x^2+1}dx = \int_0^{\sqrt3}\frac{2u'(x)}{u(x)}dx = 2\left[\ln(u(x))\right]_0^{\sqrt3}$

$$=2\left[\ln(x^2+1)\right]_0^{\sqrt3} = 2\left[(\ln 4)-0\right]=2\ln 4$$

7) إذا وضعنا $u(x)=x+3$ ، فإن $u'(x)=1$. ويكون لدينا

$$\int_{-2}^{1}\frac{1}{\sqrt{x+3}}dx = \int_{-2}^{1}\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}dx = \left[2\sqrt{u(x)}\right]_{-2}^{1} = \left[2\sqrt{x+3}\right]_{-2}^{1} = 4-2=2$$

ملاحظة : بتطبيق الطرق السابقة يمكننا معالجة بقيةالتمارين بسرعة أكبر.

8) $\int_0^1 \frac{1}{x^2+2x+1}dx = \int_0^1\frac{1}{(x+1)^2}dx = \left[\ln(x+1)\right]_0^1 = \ln 2$.

9) $\int_1^2\frac{2-4x}{\sqrt{x^2-x+3}}dx = -2\int_1^2\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+3}}dx = -4\left[\sqrt{x^2-x+3}\right]_1^2$

$$= -4\left(\sqrt5-\sqrt3\right)$$

10) $\int_1^e \frac1x(\ln x)^2dx = \frac13\left[(\ln x)^3\right]_1^e = \frac13(1-0)=\frac13$.

11) $\int_2^3 x+2+\frac{4}{x-1}dx = \left[\frac12x^2+2x+4\ln(x-1)\right]_2^3$

$$=\left(\frac92+6+4\ln2\right)-(2+4+0)=\frac92+4\ln2$$

12) $\int_2^e\frac{1}{x(\ln x)^2}dx = \int_2^e\frac{\frac1x}{(\ln x)^2}dx = \left[\frac{-1}{\ln x}\right]_2^e = (-1)-\left(\frac{-1}{\ln2}\right) = -1+\frac1{\ln2}$

13) $\int_{-2}^0 1+\frac{3}{2x+1}+\frac{3}{2x-6}dx = \int_{-2}^0 1+\frac32\times\frac{2}{2x+1}+\frac32\times\frac{2}{2x-6}dx$

$$=\left[x+\frac32\ln|2x+1|+\frac32\ln|2x-6|\right]_{-2}^0$$

$$=\left(\frac32\ln6\right)-\left(-2+\frac32\ln3+\frac32\ln10\right) = 2+\frac32(\ln6-\ln3-\ln10)$$

14) $\int_0^1\frac{\ln(x+1)}{x+1}dx = \int_0^1\frac{1}{x+1}\times\ln(x+1)dx$

$$= \left[\frac12(\ln(x+1))^2\right]_0^1 = \frac12(\ln2)^2$$

15) $\int_e^{e^2}\frac{1}{x\ln x}dx = \int_e^{e^2}\frac{\frac1x}{\ln x}dx = \left[\ln(\ln x)\right]_e^{e^2}=\ln2$

16) $\int_0^{\ln2}(e^x-e^{2x})dx = \int_0^{\ln2}\left(e^x-\frac12\times2e^{2x}\right)dx$

$$= \left[e^x-\frac12e^{2x}\right]_0^{\ln2} = \left(2-\frac12\times4\right)-\left(1-\frac12\right) = -\frac12$$

17) $\int_1^2\frac{e^x+1}{e^x}dx = \int_1^2 1+\frac1{e^x}dx = \int_1^2 1-(-e^{-x})dx = \left[x-e^{-x}\right]_1^2$

$$= \left(2-\frac1{e^2}\right)-\left(1-\frac1e\right) = 1-\frac1{e^2}+\frac1e$$

18) $\int_0^{\ln3}\frac{2e^{3x}-e^x-5}{e^x}dx = \int_0^{\ln3}2e^{2x}-1-5e^{-x}dx = \left[e^{2x}-x+\frac5{e^x}\right]_0^{\ln3}$

$$= \left(9-\ln3+\frac53\right)-(1+5) = \frac{14}3-\ln3$$

19) $\int_0^1 xe^{-x^2}dx = -\frac12\int_0^1-2xe^{-x^2}dx = \left[-\frac12e^{-x^2}\right]_0^1 = -\frac1{2e}+\frac12=\frac12\left(1-\frac1e\right)$



1) عين الدالة المشتقة للدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\frac{1}{2}x^2\ln x$.

2) استنتج قيمة $\int_1^{e^2}\left(x\ln x+\frac{x}{2}\right)dx$.

الحل

1) من أجل كل x من $]0,+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{1}{2}x^2\ln x = x\ln x+\frac{1}{2}x$

إذن الدالة f دالة أصلية للدالة $x\mapsto x\ln x+\frac{1}{2}x$ على $]0,+\infty[$.

2) $\int_1^{e^2}\left(x\ln x+\frac{x}{2}\right)dx=\left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^{e^2}=e^4$.

التمرين 77

احسب القيمة المتوسطة للدالة f على المجال I في الحالات الآتية :

1) $f(x)=2x-1$ ، $I=[-3,1]$

2) $f(x)=\frac{1}{x+1}$ ، $I=[0,e-1]$

3) $f(x)=\frac{x}{x^2+9}$ ، $I=[0,4]$



1) $\frac{1}{1-(-3)}\int_{-3}^{1}(2x-1)dx=\frac{1}{4}\left[x^2-x\right]_{-3}^{1}=\frac{1}{4}(12-0)=3$

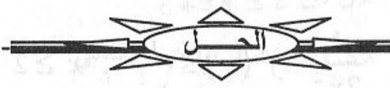
2) $\frac{1}{(e-1)-(0)}\int_0^{e-1}\frac{1}{x+1}dx=\frac{1}{e-1}\left[\ln(x+1)\right]_0^{e-1}=\frac{1}{e-1}(1-0)=\frac{1}{e-1}$

3) $\frac{1}{4-(0)}\int_0^4\frac{x}{x^2+9}dx=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\ln\left(x^2+9\right)\right]_0^4=\frac{1}{8}(\ln 25-\ln 9)$

التمرين 78

اشترت شركة آلة بمبلغ قدره 500000 د.ج . يمكن لهذه الشركة أن تبيع هذه الآلة بعد t من السنوات بمبلغ $V(t)$ ، حيث $V(t)=\frac{500000}{0.5t+1}$ (بالد.ج) .
وهذا من أجل $0<t<8$.

1) بعد كم سنة تفقد الآلة 50% من ثمن شرائها؟
2) احسب القيمة المتوسطة لثمن البيع في الفترة $[0,4]$.



1) إن 50% من ثمن الشراء تقدر بـ 250000 د.ج .
نضع $V(t)=250000$ ومنه $\frac{500000}{0.5t+1}=250000$ يكافئ $0.5t+1=2$
ومنه $t=4$. إذن بعد 4 سنوات تفقد الآلة 50% من ثمن شرائها.

2) القيمة المتوسطة لثمن البيع في الفترة $[0,4]$.

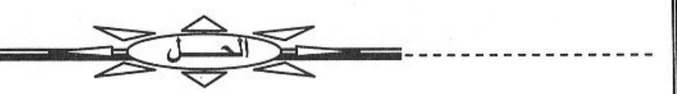
$$\frac{1}{4-0}\int_0^4\frac{500000}{0.5t+1}dx=250000\int_0^4\frac{0.5}{0.5t+1}dx$$
$$=250000\left[\ln(0.5t+1)\right]_0^4=250000(\ln 3-0)\cong 274653\ \text{DA}$$



لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=9x^2+4x$.

1) عين V_m القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[0,2]$.

2) عين عددا حقيقيا c من $[0,2]$ ، بحيث $V_m=f(c)$.



1) القيمة المتوسطة V_m للدالة f على المجال $[0,2]$.

$$V_m=\frac{1}{2-0}\int_0^2\left(9x^2+4x\right)dx=\frac{1}{2}\left[3x^3+2x^2\right]_0^2=\frac{1}{2}(32-0)=16$$

2) تعيين c من $[0,2]$, بحيث $V_m=f(c)$.

$V_m=f(c)$ يكافئ $9c^2+4c=16$ وهذا يكافئ $9c^2+4c-16=0$

وبحل هذه المعادلة نجد $c\cong 1.13$

التمرين80

لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\frac{1}{x^2+3}$.

1) بين أنه من أجل كل $x\ge 2$, $\frac{1}{2x^2}\le f(x)\le\frac{1}{x^2}$

2) استنتج حصرا للتكامل الآتي : $\int_2^3 f(x)dx$

الحل

1) لدينا $\frac{1}{x^2+3}\le\frac{1}{x^2}$ ومنه $f(x)\le\frac{1}{x^2}$ ...(أ)

ولدينا $x\ge 2$ تكافئ $x^2\ge 4$ وتكافئ , أيضا , $2x^2\ge 4+x^2$

ومنه $\frac{1}{2x^2}\le\frac{1}{4+x^2}\le\frac{1}{3+x^2}$ وبالتالي : $f(x)\ge\frac{1}{2x^2}$ ...(ب)

والخلاصة : من (أ) و (ب) نجد $\frac{1}{2x^2}\le f(x)\le\frac{1}{x^2}$

2) بما أن $\frac{1}{2x^2}\le f(x)\le\frac{1}{x^2}$ فإن $\int_2^3\frac{1}{2x^2}dx\le\int_2^3 f(x)\le\int_2^3\frac{1}{x^2}dx$

بماأن $\int_2^3\frac{1}{x^2}dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_2^3=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ و $\int_2^3\frac{1}{2x^2}dx=\frac{1}{2}\int_2^3\frac{1}{x^2}dx=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$

فإن $\frac{1}{12}\le\int_2^3 f(x)\le\frac{1}{6}$.



المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة هي cm)

احسب $\mathscr{A}$, بـ cm^2 , مساحة الحيز المستوي المحدد بمحور الفواصل والمنحني $\mathscr{C}$ الممثل للدالة f في الحالات الآتية :

1) $f(x)=3x^2+1$, من أجل $1\le x\le 2$.

2) $f(x)=-x^2+5x-6$, من أجل $3\le x\le 4$.

3) $f(x)=-x^2+2x+3$, من أجل $0\le x\le 4$.



1) ندرس إشارة $f(x)$ من أجل كل $1\le x\le 2$.

نلاحظ أنه من أجل كل $1\le x\le 2$, $f(x)\ge 0$ وبالتالي

$$\mathscr{A}=\int_1^2\left(3x^2+1\right)dx=\left[x^3+x\right]_1^2=(8+2)-(1+1)=8\,cm^2$$

2) ندرس إشارة $f(x)$ من أجل كل $3\le x\le 4$.

نستنتج أنه من أجل كل $3\le x\le 4$, $f(x)\le 0$ وبالتالي

$$\mathscr{A}=-\int_3^4\left(-x^2+5x-6\right)dx=-\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-6x\right]_3^4$$

$$=-\left[\left(-\frac{64}{3}+40-24\right)-\left(-9+\frac{45}{2}-18\right)\right]\cong 0.83\,cm^2$$

3) ندرس إشارة $f(x)$ من أجل كل $0\le x\le 4$. فنستنتج أن :

- من أجل كل $0\le x\le 3$, $f(x)\ge 0$.
- من أجل كل $3\le x\le 4$, $f(x)\le 0$, بالتالي :

$$\mathscr{A}=\int_0^3\left(-x^2+2x+3\right)dx-\int_3^4\left(-x^2+2x+3\right)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x\right]_0^3-\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x\right]_3^4=\frac{34}{3}cm^2$$

التمرين82

لتكن f و g دالتان معرفتان على $\left[\frac{5}{2},5\right]$ كما يلي : $f(x)=\frac{1}{x-2}$ و $g(x)=\frac{2}{x-1}$

المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (الوحدة هي $2cm$)

C_f و C_g المنحنيان الممثلان , على الترتيب , للدالتين f و g .

1) ادرس الوضعية النسبية للمنحنيين C_f و C_g على $\left[\frac{5}{2},5\right]$.

2) احسب $\mathscr{A}$, بـ cm^2 , مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين C_f و C_g والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=\frac{5}{2}$ و $x=3$.

الحل

1) ليكن الفرق $f(x)-g(x)=\frac{1}{x-2}-\frac{2}{x-1}=\frac{-x+3}{(x-2)(x-1)}$

نلاحظ أنه من أجل كل x من $\left[\frac{5}{2},5\right]$, $x-1>0$ و $x-2>0$

أي $(x-2)(x-1)>0$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $-x+3$ وبالتالي

x	$\frac{5}{2}$	3	5
$f(x)-g(x)$	$+$	0	$-$
الوضعية	C_f فوق C_g	C_f يقطع C_g	C_f تحت C_g

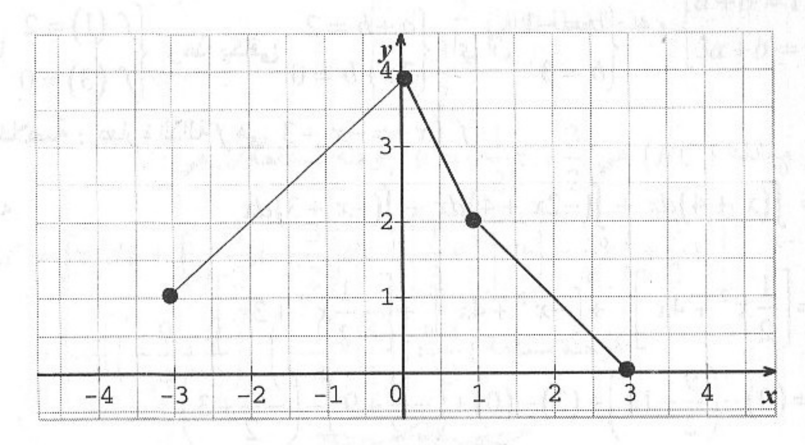
2) بما أنه من أجل كل x من $\left[\frac{5}{2},3\right]$, $f(x)-g(x)\geq 0$ فإن

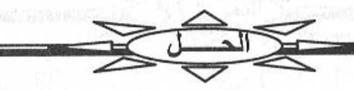
$$\mathscr{A}=\int_{\frac{5}{2}}^{3}\left(f(x)-g(x)\right)dx=\left[\ln(x-2)-\ln(x-1)\right]_{\frac{5}{2}}^{3}$$

$$=\left[\ln\left(\frac{x-2}{x-1}\right)\right]_{\frac{5}{2}}^{3}=\left(\ln\frac{1}{2}-\ln\frac{1}{3}\right)\times 4cm^2=(\ln 3-\ln 2)\times 4cm^2\cong 1.6cm^2$$

التمرين 83

من أجل $-3\leq x\leq 3$, احسب $\mathscr{A}$, بـ cm^2 , مساحة الحيز المستوي المحصور بين محور الفواصل والمنحني الممثل للدالة التآلفية , كما في الشكل الآتي :





الحل

لتكن الدالة التآلفية f المعرفة كما يلي :

$f(x)=ax+b$, حيث a و b عددان حقيقيان و $a\neq 0$

إذن $\mathscr{A}=\int_{-3}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{3}f(x)dx$

• لنعين عبارة f على $[-3,0]$.

نلاحظ أن المنحني يمر بالنقطة التي إحداثياها $(-3,1)$ وبالنقطة التي إحداثياها $(0,4)$.

لدينا $\begin{cases}f(-3)=1\\ f(0)=4\end{cases}$ وهذا يكافئ $\begin{cases}-3a+b=1\\ b=4\end{cases}$ أي أن $\begin{cases}a=1\\ b=4\end{cases}$

والخلاصة : عبارة الدالة f هي : $f(x)=x+4$.

• لنعين عبارة f على $[0,1]$.

نلاحظ أن المنحني يمر بالنقطة التي إحداثياها $(0,4)$ وبالنقطة التي إحداثياها $(1,2)$.

لدينا $\begin{cases}f(0)=4\\ f(1)=2\end{cases}$ وهذا يكافئ $\begin{cases}b=4\\ a+b=2\end{cases}$ أي أن $\begin{cases}a=-2\\ b=4\end{cases}$

والخلاصة : عبارة الدالة f هي $f(x)=-2x+4$

• لنعين عبارة f على $[1,3]$.

نلاحظ أن المنحني يمر بالنقطة التي إحداثياها $(1,2)$ وبالنقطة التي إحداثياها $(3,0)$.

لدينا $\begin{cases} f(1)=2 \\ f(3)=0 \end{cases}$ وهذا يكافئ $\begin{cases} a+b=2 \\ 3a+b=0 \end{cases}$ أي أن $\begin{cases} a=-1 \\ b=3 \end{cases}$

والخلاصة : عبارة الدالة f هي $f(x)=-x+3$

ومنه

$$\mathscr{A}=\int_{-3}^{0}(x+4)dx+\int_{0}^{1}(-2x+4)dx+\int_{1}^{3}(-x+3)dx$$

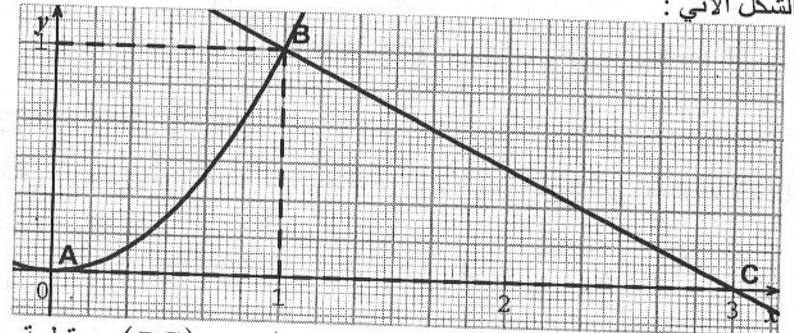
$$=\left[\frac{1}{2}x^2+4x\right]_{-3}^{0}+\left[-x^2+4x\right]_0^1+\left[-\frac{1}{2}x^2+3x\right]_1^3$$

$$=(0)-\left(\frac{9}{2}-12\right)+(3)-(0)+\left(-\frac{9}{2}+9\right)-\left(-\frac{1}{2}+3\right)$$

$$=\frac{25}{2}=12.5$$ (وحدة مساحة)

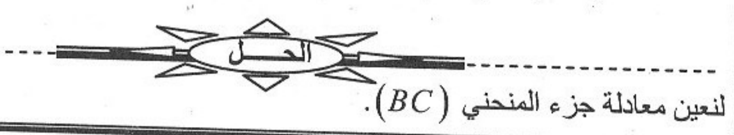
التمرين84

ليكن الشكل الآتي :



إن معادلة جزء المنحني (AB) هي $y=x^2$ و جزء المنحني (BC) هي قطعة من مستقيم .

احسب $\mathscr{A}$, بوحدة المساحة, مساحة الحيز المستوي المحصور بين محور الفواصل والجزئين (AB) و (BC).



لنعين معادلة جزء المنحني (BC).

إن معادلة الجزء (BC) هي من الشكل $y=ax+b$ لأنه جزء من منحن يمثل دالة تآلفية ويشمل النقطتين $C(3,0)$, $B(1,1)$.

إذن $\begin{cases} a+b=1 \\ 3a+b=0 \end{cases}$ وهذه الجملة تكافئ $\begin{cases} a=-\frac{1}{2} \\ b=\frac{3}{2} \end{cases}$

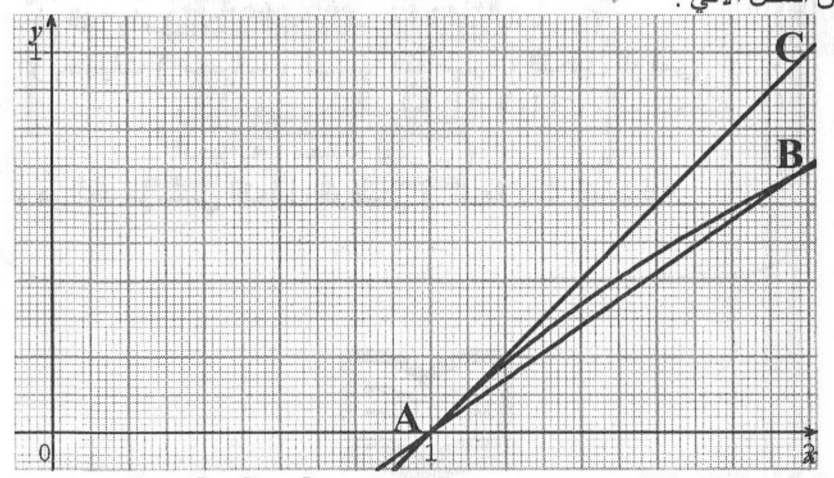
وبالتالي معادلة (BC) هي $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ ومنه المساحة $\mathscr{A}$ هي :

$$\mathscr{A}=\int_0^1 x^2dx+\int_1^3\left(-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1+\left[-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x\right]_1^3$$

$$=\frac{1}{3}+\left[\left(-\frac{9}{4}+\frac{9}{2}\right)-\left(-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\right)\right]=\frac{4}{3}$$ (وحدة مساحة)



ليكن الشكل الآتي :



إن المنحني ذا المعادلة $y=\ln x$ محصور بالقطعتين $[AB]$ و $[AC]$ حيث $A(1,0)$, $B(2,\ln 2)$, $C(2,1)$. عين حصرا للتكامل $\int_1^2 \ln x\,dx$



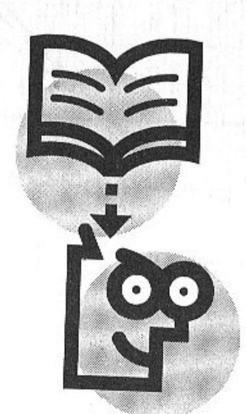
إن التكامل $\int_1^2 \ln x \, dx$ هو$\mathscr{A}$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني الممثل للدالة $x \mapsto \ln x$ ومحور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 1$ و $x = 2$.

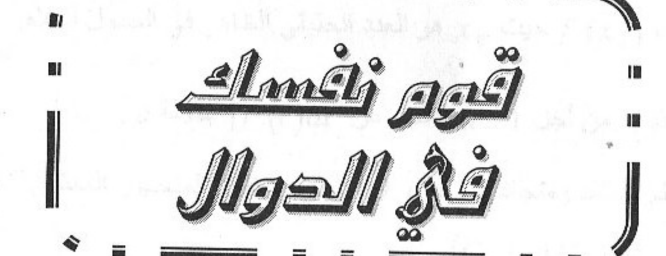
من الشكل نستنتج أن المساحة$\mathscr{A}$ محصورة بين مساحة المثلث ACH و المثلث ABH.

وبالتالي مساحة المثلث $ACH \geq \mathscr{A} \geq$ مساحة المثلث ABH.

أي أن $\frac{\ln 2}{2} \leq \int_1^2 \ln x \, dx \leq \frac{1}{2}$.

ليونارد أولرEuler Leonhard (1707 – 1783)
من أكبر العلماء الذين عرفهم التاريخ ، استقر في البداية ببترسبورغ ثم في برلين سنة 1741 حيث ترأس أكادمية العلوم إلى غاية 1766 .تخصص في :
علم الفلك (دراسة مسار المجرات) .
علم الفيزياء (الحقل المغناطيسي ، البصريات ...) .
الرياضيات (الحساب ، الهندسة التفاضلية ، التحليل الرقمي والوظيفي ، حساب تغيرات البيانات ، المساحات الجبرية ، معادلة أولر...) .
وهو أحد مؤسسي التحليل الوظيفي و المعادلات التفاضلية .





التمرين 1 **5 نقاط**

1. لتكن الدالة g المعرفة على $]0,+\infty[$ كما يلي : $g(x)=\ln x-\dfrac{2}{x}$

يعطي ، في الأسفل ، جدول تغيرات g .

x	0	2,3	x_0	2,4	$+\infty$
g	$-\infty$		0		$+\infty$

برهن كل خصائص الدالة g الواردة في هذا الجدول.

2. لتكن الدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{5\ln x}{x}$

a) برهن أن $f(x_0)=\dfrac{10}{x_0^2}$ حيث x_0 هو العدد الحقيقي الظاهر في الجدول أعلاه.

b) ليكن a عددا حقيقيا .من أجل $a>1$ ، عبر عن $\int_1^a f(t)dt$ بدلالة a .

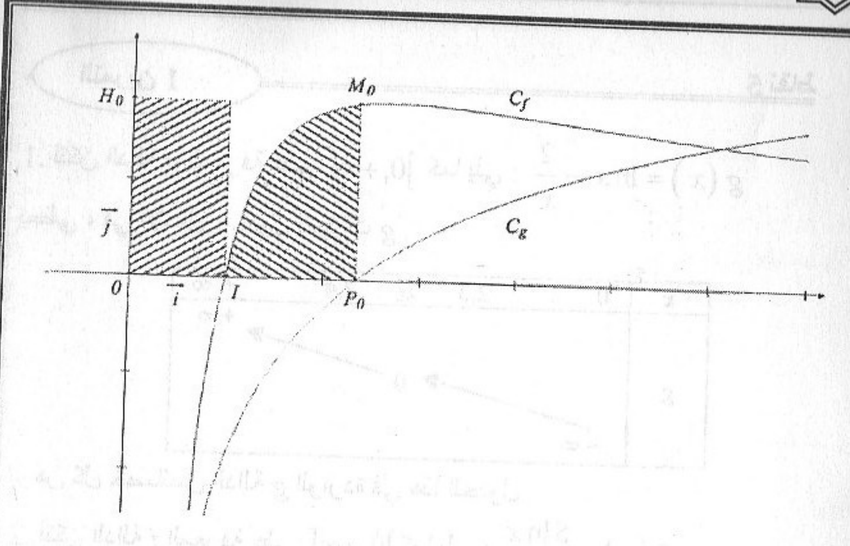
3. لقد رسمنا في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ (في الأسفل) المنحنيين الممثلين للدالتين f و g ورمزهما (C_f) و (C_g) .

لتكن I نقطة إحداثياها $(1,0)$ و p_0 نقطة تقاطع (C_g) مع محور الفواصل و M_0 نقطة من (C_f) لها نفس فاصلة p_0 و H_0 المسقط العمودي للنقطة M_0 على محور التراتيب.

نرمز بالرمز $\mathscr{D}_1$ للحيز المستوي المحدود بالمنحني (C_f) والقطعتين $[IP_0]$ و $[P_0M_0]$

نرمز بالرمز $\mathscr{D}_2$ للحيز المستوي المحدود بالمستطيل المرسم انطلاقا من $[OI]$ و $[OH_0]$

برهن أن الحيزين $\mathscr{D}_1$ و $\mathscr{D}_2$ لهما نفس المساحة ثم أعط حصرا لهذه المساحة بسعة 0.2.



التمرين 2 **5 نقاط**

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ كما يلي : $f(x)=(x-1)(2-e^{-x})$

$\mathscr{C}$ المنحني الممثل لها مرسوم (في الأسفل) في معلم متعامد ومتجانس (وحدة الرسم هي 2cm)

1. a) ادرس نهاية الدالة f عند $+\infty$.

b) بين أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=2x-2$ مقارب للمنحني $\mathscr{C}$.

c) ادرس الوضعية النسبية للمنحني $\mathscr{C}$ والمستقيم Δ .

2. a) احسب $f'(x)$ وبين أن $f'(x)=xe^{-x}+2(1-e^{-x})$.

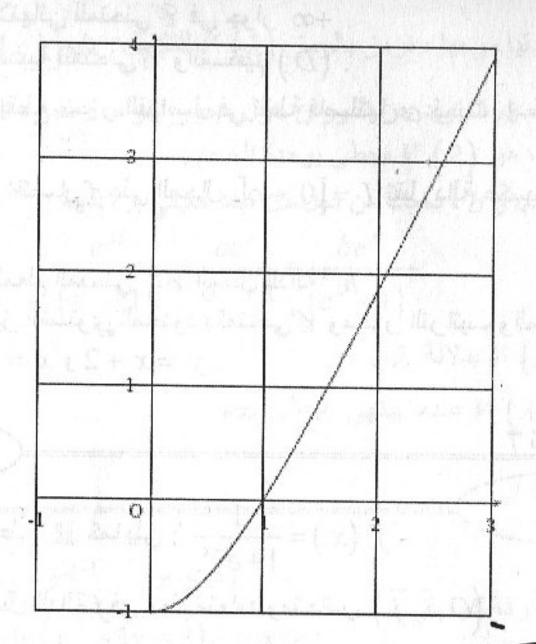
b) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما ، $f'(x)>0$.

c) عين قيمة $f'(0)$ ثم أنجز جدول تغيرات الدالة f.

3. باستعمال التكامل بالتجزئة ، احسب بالـ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحني $\mathscr{C}$ والمستقيم Δ والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=3$.

4. a) عين النقطة A من $\mathscr{C}$ والتي يكون فيها المماس للمنحني $\mathscr{C}$ موازيا للمستقيم Δ .

b) احسب بـ cm المسافة بين النقطة A والمستقيم Δ .



التمرين 3 **5 نقاط**

الجزء أ

نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=e^{-2x}+2x-1$

1. احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2. a) من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، احسب $g'(x)$.

b) أنجز جدول تغيرات الدالة g .

c) من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، استنتج إشارة $g(x)$.

الجزء ب

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x+2+(x-1)e^{2x}$

وليكن $\mathscr{C}$ المنحني الممثل لها في معلم متعامد ومتجانس .

1. احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2. a) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=g(x)e^{2x}$

b) أنجز جدول تغيرات الدالة f.

3. a) بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=x+2$ مقارب مائل للمنحني $\mathscr{C}$ في

جوار $-\infty$.

b) ادرس الفرع اللانهائي للمنحني $\mathscr{C}$ في جوار $+\infty$.

4. ادرس الوضعية النسبية للمنحني $\mathscr{C}$ والمستقيم (D) .
5. بين أن المنحني $\mathscr{C}$ يقطع محور الفواصل في نقطة فاصلتها α بحيث $-2<\alpha<-1$.
6. أنشئ المنحني $\mathscr{C}$.
7. a) بين أن الدالة h اقتصار f على المجال $I=[0,+\infty[$ تقبل دالة عكسية h^{-1} ، عين مجال تعريفها .

b) أنشئ في نفس المعلم المنحني $\mathscr{C}'$ الممثل للدالة h^{-1} .

8. احسب مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحني $\mathscr{C}$ ومحور التراتيب والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $y=x+2$.

التمرين 4 — 7 نقاط

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}$ ،

وليكن $\mathscr{C}$ المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ ،

(وحدة الرسم : 5cm)

الجزء : أ دراسة الدالة f.

1. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x)=\frac{e^x}{1+e^x}$.

عين نهايتي f عند $-\infty$ وعند $+\infty$. فسر بيانيا النتائج المتحصل عليها.

احسب $f'(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x . استنتج تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$.

أنجز جدول تغيرات الدالة f.

ارسم المنحني $\mathscr{C}$ ومستقيميه المقاربين في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

الجزء : ب بعض الخواص البيانية.

1. نعتبر النقطتين M و M' من المنحني $\mathscr{C}$ فاصلتاهما على الترتيب x و $-x$.
عين احداثيي A منتصف القطعة $[MM']$. ماذا تمثل النقطة A للمنحني $\mathscr{C}$ ؟
2. ليكن n عدد طبيعيا . نرمز بالرمز D_n للحيز المستوي المحدود بالمستقيم ذي المعادلة $y=1$ والمنحني $\mathscr{C}$ والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=n$.
نرمز بالرمز $\mathscr{A}_n$ لمساحة الحيز D_n معطاة بوحدة المساحة.
a. احسب $\mathscr{A}_n$.
b. ادرس نهاية $\mathscr{A}_n$ ، عندما ينتهي n إلى $+\infty$.

الجزء : جـ حساب حجم .

ليكن λ عدد حقيقيا موجبا ، نرمز بالرمز $V(\lambda)$ للتكامل $\int_{-\lambda}^{0}\left[f(x)\right]^2dx$.

نقبل أن قياس الحجم المتولد عن الدوران حول محور الفواصل لجزء المنحني $\mathscr{C}$ من أجل $-\lambda\le x\le 0$ ، هو $V(\lambda)$ معطى بوحدة الحجم .

1. عين العددين a و b ، بحيث من أجل كل عدد حقيقي x ، لدينا :
$$\frac{e^{2x}}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{ae^x}{e^x+1}+\frac{be^x}{\left(e^x+1\right)^2}$$
2. عبر عن $V(\lambda)$ بدلالة λ .
3. عين نهاية $V(\lambda)$ عندما ينتهي λ إلى $+\infty$.

التمرين 5 — 7 نقاط

لتكن الدالة f المعرفة كما يلي :
$$\begin{cases} f(x)=x+1-e^{(x+1)} & , x\le -1 \\ f(x)=x+\ln\left(x^3-3x+3\right) & , x\ge 1 \end{cases}$$

(C) هو المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

الجزء : أ

من أجل كل x من $[1,+\infty[$ نضع $g(x)=x^3-3x+3$

1. a) ادرس تغيرات الدالة g على $[1,+\infty[$.
b) استنتج أنه من أجل كل x من $[1,+\infty[$ ، $g(x)>0$.
2. استنتج ما يلي :
a) $D_f=]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$.
b) من أجل كل x من $[1,+\infty[$ ، $f(x)\ge x$.
c) المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[1,+\infty[$.

الجزء : ب

1. a) بين أن $f_g'(-1)=0$ ثم فسر النتيجة بيانيا.
b) بين أن $f_d'(1)=1$ ثم فسر النتيجة بيانيا.
2. بين أن الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $[1,+\infty[$ و $]-\infty,-1]$.
3. a) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل للمنحني في جوار $-\infty$.

b) ادرس الوضع النسبي للمنحني (C) مع (Δ) .

4. a) بين أنه من أجل كل x من $[1,+\infty[$ ، $f(x)=x+3\ln x+\ln\left(1-\frac{3}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)$

b) ادرس الفرع اللانهائي للمنحني (C) في جوار $+\infty$.

5. أنشئ المنحني (C) .

6. ليكن h اقتصار الدالة f على المجال $[1,+\infty[$.

a) بين أن h تقابل من المجال $[1,+\infty[$ نحو مجال J يطلب تعيينه .

b) أنشئ ، نفس المعلم ، المنحني الممثل للدالة h^{-1} .

الجزء : ج

لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي : $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=h^{-1}(u_n)\ ,\ n\in\mathbb{N} \end{cases}$

(يمكنك استعمال نتائج دراسة الدالة f على $[1,+\infty[$)

1. بين بالتراجع أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_n\geq 1$.

2. بين أن (u_n) متناقصة (يمكنك استعمال الجزء أ – 2 – b)

3. استنتج أن (u_n) متقاربة واحسب نهايتها.

التمرين 6 — 9 نقاط

الجزء : أ

لتكن الدالة g المعرفة كما يلي : $g(x)=e\ln x-x$

وليكن (C_g) المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. عين مجموعة تعريف الدالة g .

2. a) احسب $\lim_{x\to 0^+} g(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

b) احسب $\lim_{x\to +\infty} g(x)$ ثم تحقق من أن المنحني (C_g) يقبل المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-x$ كاتجاه مقارب في جوار $+\infty$.

3. a) عين الدالة المشتقة $g'(x)$ ثم ادرس إشارتها من أجل كل x من $\mathbb{R}_+^*$

b) احسب $g(e)$.

c) أنجز جدول تغيرات الدالة g .

d) استنتج أنه من أجل كل x من $]0,e[\cup]e,+\infty[$ ، $g(x)<0$.

4. a) عين نقطة تقاطع المستقيم (Δ) مع المنحني (C_g) ثم ادرس وضعهما النسبي .

b) أنشئ (C_g) .

الجزء : ب

لتكن الدالة f المعرفة على $\begin{cases} f(x)=e(x-x\ln x)+\frac{x^2}{2}\ ,\ x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

وليكن (C_f) المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a) بين أن f مستمرة على اليمين عند 0 .

b) بين $\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ ثم استنتج دراسة الفرع اللانهائي للمنحني (C_f) .

c) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين عند 0 . فسر النتيجة هندسيا .

d) اثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}_+^*$ ، $f'(x)=-g(x)$ ثم استنتج جدول تغيرات الدالة f.

2. a) من أجل كل x من $\mathbb{R}_+^*$ ، احسب $f''(x)$. استنتج أن النقطة A ذات الاحداثيين $\left(e,\frac{e^2}{2}\right)$ نقطة انعطاف للمنحني (C_f).

b) أعط معادلة لمماس المنحني (C_f) في النقطة A .

3. أنشئ المنحني (C_f) .

4. عين دالة G أصلية للدالة g على المجال $[1,e]$ ثم احسب $G(e)-G(1)$.

التمرين 7 — 5 نقاط

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\frac{x}{e^x-x}$

وليكن $(\mathscr{C})$ المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الرسم هي 2cm على محور الفواصل و5cm على محور التراتيب)

الجزء : أ

لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=e^{x}-x-1$

1. ادرس تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$. استنتج إشارة g .
2. بين أنه من كل x ، $(e^{x}-x)$ موجب تماما .

الجزء : ب

1. a) احسب نهايتي f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.
   b) فسر، بيانيا ، النتيجتين المتحصل عليهما .
2. a) احسب $f'(x)$.
   b) ادرس تغيرات الدالة f ثم أنجز جدول تغيراتها.
3. a) عين معادلة لـ (T) مماس المنحني $(\mathscr{C})$ في النقطة ذات الفاصلة 0 .
   b) باستعمال الجزء : أ ادرس وضعية $(\mathscr{C})$ بالنسبة إلى المستقيم (T) .
4. ارسم المستقيم (T) ، المستقيمات المقاربة والمنحني $(\mathscr{C})$.

7 نقاط

التمرين 8

الجزء : أ دراسة دالة .

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ كما يلي :

$$f(x)=x\ln(x+1)$$

المنحني الممثل لها $(\mathscr{C})$ في معلم متعامد معطى في الملحق .

1. a) بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0,+\infty[$.
   b) هل محور الفواصل مماس للمنحني $(\mathscr{C})$ في النقطة ذات الفاصلة 0 ؟
2. نضع $I=\int_{0}^{1}\frac{x^{2}}{x+1}dx$.
   a) عين ثلاثة أعداد حقيقية a ، b و c بحيث من أجل كل $x\neq-1$ ،
   $$\frac{x^{2}}{x+1}=ax+b+\frac{c}{x+1}$$
   b) احسب I .
3. باستعمال التكامل بالتجزئة وباستعمال نتائج السؤال 2 ، احسب ، بوحدة المساحة، $\mathscr{A}$ مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحني $(\mathscr{C})$ والمستقيمات التي معادلاتها $x=0$ و $x=1$ و $y=0$.
4. بين أن المعادلة $f(x)=0.25$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[0,1]$.
   أعط حصرا للعدد α بسعة 10^{-2} .

الجزء : ب دراسة متتالية .

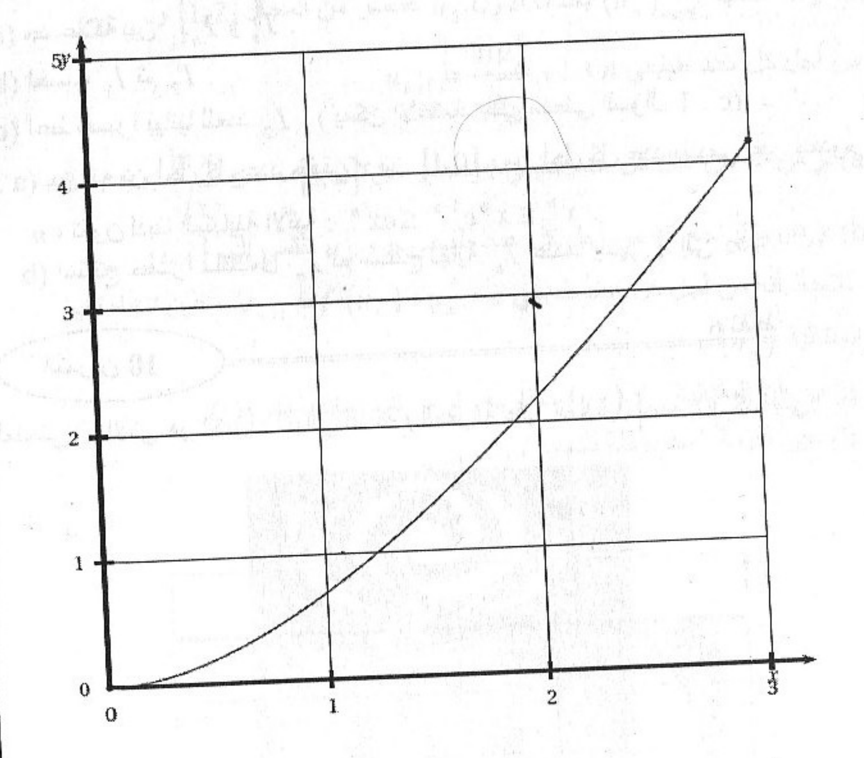
المتتالية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n=\int_{0}^{1}x^{n}\ln(x+1)dx$.

1. عين اتجاه تغير المتتالية (u_n) .
   هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟
2. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $0\leq u_n\leq\frac{\ln 2}{n+1}$.
   استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

المنحني $(\mathscr{C})$ الممثل للدالة f ، متحصل عليه باستعمال مجدول

Représentation graphique de la fonction f obtenue à l'aide d'un tableur

Courbe $(\mathscr{C})$



6 نقاط

التمرين 9

1. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x^2 e^{1-x}$.
وليكن $(\mathscr{C})$ المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الرسم هي 2cm).
a) عين نهايتي f عند $-\infty$ وعند $+\infty$. ماذا تستنتج ، بيانيا ؟
b) بين أن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$. عين دالتها المشتقة f' .
c) أنجز جدول تغيرات الدالة f ثم ارسم المنحني $(\mathscr{C})$.
2. ليكن العدد الطبيعي غير المعدوم n . نعتبر التكامل I_n المعرف كما يلي :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$$

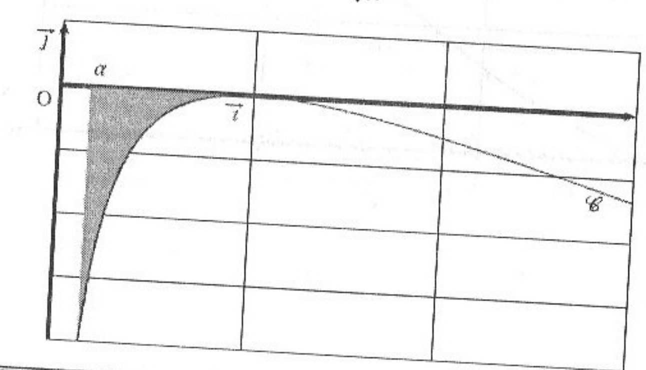
a) جد علاقة بين I_{n+1} و I_n .
b) احسب I_1 ثم I_2 .
c) أعط تفسيرا بيانيا للعدد I_2 . (يمكن الاعتماد على منحني السؤال 1 . c)
3. a) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[0,1]$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، تكون لدينا المتباينة الآتية : $x^n \le x^n e^{1-x} \le ex^n$.
b) استنتج حصرا للتكامل I_n ثم استنتج نهاية I_n عندما ينتهي n إلى $+\infty$.

6 نقاط

التمرين 10

المنحني $\mathscr{C}$ الآتي هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ كما يلي:

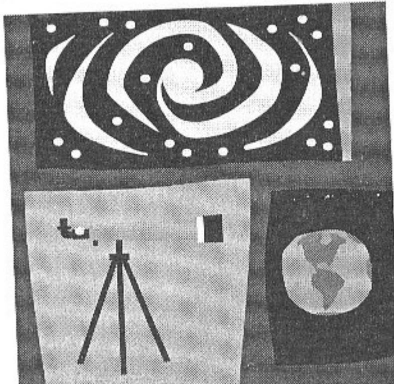
$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} + 1 - x$$

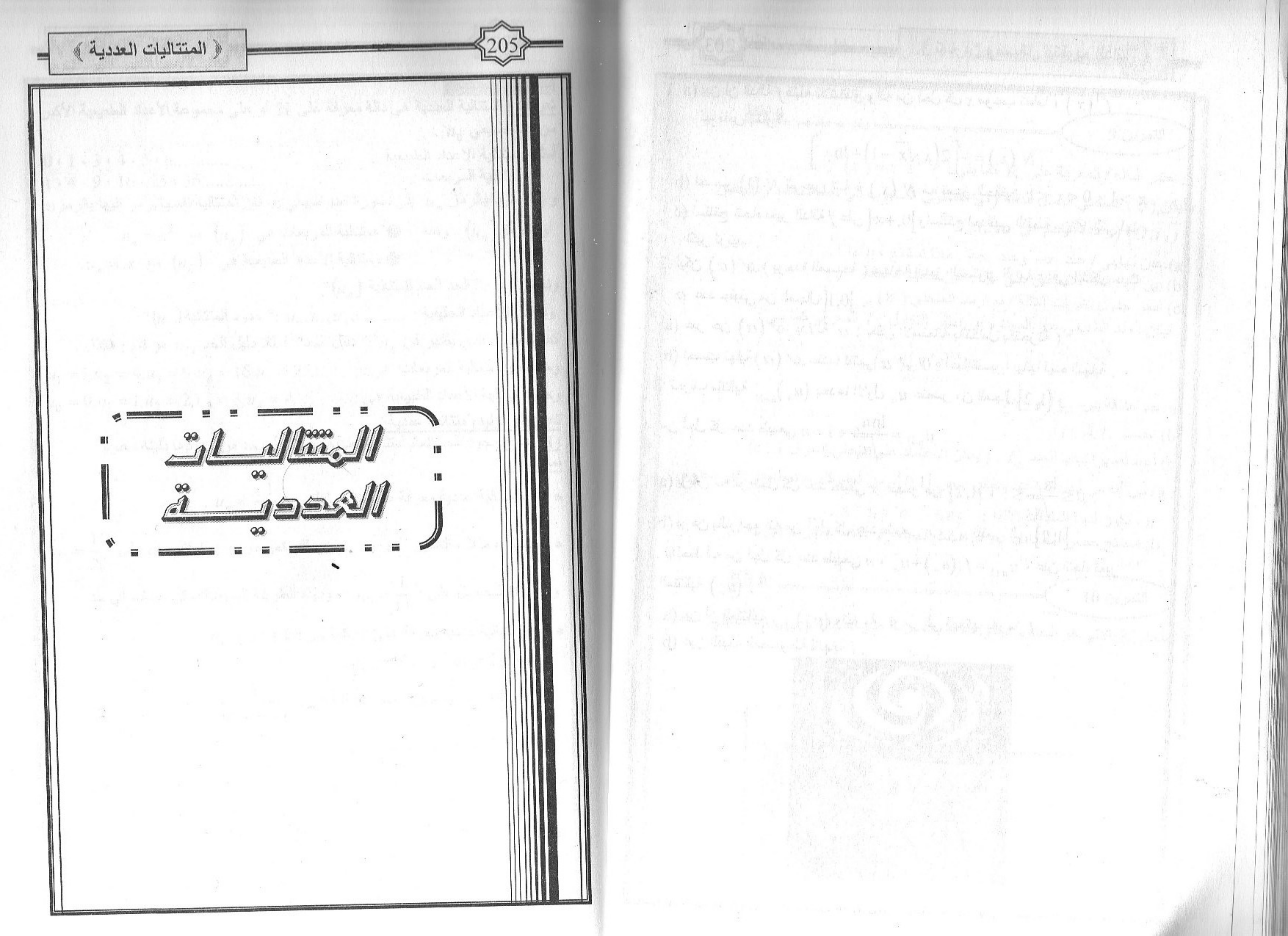


1. a) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق وأنه من أجل كل x موجب تماما ، $f'(x)$ لها نفس إشارة

$$N(x) = -\left[2\left(x\sqrt{x} - 1\right) + \ln x\right]$$

b) احسب $N(1)$ ثم عين إشارة $N(x)$ مع تمييز الحالتين $0 < x < 1$ و $x > 1$.
c) استنتج اتجاه تغير الدالة f على $]0,+\infty[$ واستنتج احداثيي النقطة من $\mathscr{C}$ التي لها أكبر ترتيب .
2. ليكن $\mathscr{A}(\alpha)$ (بوحدة المساحة) مساحة الحيز المستوي الرمادي في الشكل حيث α عدد حقيقي من المجال $]0,1[$.
a) عبر عن $\mathscr{A}(\alpha)$ بدلالة α (يمكن الاستعانة بالتكامل بالتجزئة).
b) احسب نهاية $\mathscr{A}(\alpha)$ عندما تنتهي α إلى 0 . أعط تفسيرا بيانيا لهذه النهاية .
3. نعرف متتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بحدها الأول u_0 عنصر من المجال $[1,2]$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{\ln u_n}{\sqrt{u_n}} + 1$
a) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x عنصر من $[1,2]$ ، $0 \le \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \le 1$.
b) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، u_n تنتمي إلى $[1,2]$.
4. نلاحظ أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n) + u_n$ ، عين اتجاه تغير المتتالية (u_n) .
5. a) بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة . نرمز إلى نهايتها بالرمز l .
b) عين القيمة المضبوطة للنهاية l .




المتتاليات
العددية

المتتاليات العددية :

تعريف : المتتالية العددية هي دالة معرفة على $\mathbb{N}$ أو على مجموعة الأعداد الطبيعية الأكبر من عدد طبيعي n_0 .

أمثلة : متتالية الأعداد الطبيعية : $0 ، 1 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ....$

متتالية المربعات : $1 ، 4 ، 9 ، 16 ، 25 ، 36 ....$

و إذا رمزنا بالرمز u_n إلى صورة عدد طبيعي n فإن المتتالية نفسها يُرمَزُ إليها بالرمز u أو بالرمز (u_n) ، ومنه : ◎ فمتتالية المربعات هي (u_n) مع $u_n = n^2$.

◎ ومتتالية الأعداد الطبيعية هي (u_n) مع $u_n = n$.

ونسمي u_n :" الحد العام للمتتالية (u_n) ".

ونسمي الأعداد الحقيقية : $u_0, u_1, u_2, ...$:" حدود المتتالية (u_n) ".

كما نسمي n الذي يظهر في u_n :" دليل الحد" فمثلا دليل الحد u_{14} هو 14 وهكذا...

ومنه حدود متتالية المربعات هي : $u_1 = 1, u_2 = 4, u_3 = 9, u_4 = 16, u_5 = 25...$

وحدود متتالية الأعداد الطبيعية هي : $u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 3, u_4 = 4...$

تعيين(أو توليد) متتالية عددية:

(1) يسمح وجود الحد العام لمتتالية عددية بحساب أي حد من حدودها **دليله معلوم.**

أمثلـــة :

- (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.
- لنحسب ، مثلا ، الحدين u_1 و u_{10} وذلك بتعويض n بـ 1 فنحصل على : $u_1 = \dfrac{1}{2}$

و n بـ 10 فنحصل على : $u_{10} = \dfrac{1}{11}$. وبهذه الطريقة البسيطة يمكن حساب أي حد .

- (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = n^2 + 1$.

ولدينا : $u_1 = 2$ و $u_{10} = 101$.

– (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = \dfrac{1}{n^2 + n + 1}$.

ولدينا : $u_1 = \dfrac{1}{3}$ و $u_{10} = \dfrac{1}{111}$.

ملاحظة : يمكن أن نعرف المتتالية العددية كما نعرف دالة عددية كما في المثال الآتي :

– (u_n) متتالية عددية : $n \mapsto f(n)$ و $f(n) = 2^n$

وبالتالي : $f(0) = +1, f(1) = +2, f(2) = 4, f(3) = +9, ...$

(2) إذا كان الحد الأول لمتتالية عددية معلوما مع وجود علاقة تربط أي حدين متتابعين فإنه يمكننا حساب أي حد من حدودها بالتراجع . فنحسب الحد الثاني فالثالث فالرابع........

أمثلـــة :

• (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 2u_n$

لنحسب ، مثلا ، الحدود u_1 و u_2 و u_3 : حسب العلاقة التراجعية لدينا

$u_1 = 2u_0 = 2\times 1 = 2$ ، $u_2 = 2u_1 = 2\times 2 = 4$ ، $u_3 = 2u_2 = 2\times 4 = 8$

• (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}$

لنحسب ، مثلا ، الحدود u_1 و u_2 و u_3 و u_4: حسب العلاقة التراجعية لدينا ،

$u_1 = u_0 + \frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ، $u_2 = u_1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

$u_3 = u_2 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ، $u_4 = u_3 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$

• (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$u_0 = 0$ و $u_1 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$

لنحسب ، مثلا ، الحدود u_2 و u_3 : حسب العلاقة التراجعية لدينا ،

$u_2 = u_1 + u_0 = 1$ ، $u_3 = u_2 + u_1 = 1 + 1 = 2$

وبهذه الطريقة البسيطة يمكن حساب أي حد من حدود المتتالية العددية (u_n).

مصطلحات :

1) نقول عن متتالية عددية (u_n) إنها **متزايدة تماما** إذا كان :

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} > u_n$.

أو من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n > 0$.

أو من أجل كل عدد طبيعي n , $u_n > 0$ و $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.

أو من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 0$ و $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.

2) نقول عن متتالية عددية (u_n) إنها **متناقصة تماما** إذا كان :

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} < u_n$.

أو من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n < 0$.

أو من أجل كل عدد طبيعي n , $u_n > 0$ و $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.

أو من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 0$ و $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.

3) نقول عن متتالية عددية (u_n) إنها **رتيبة تماما** إذا كانت متزايدة أو متناقصة.

ملاحظة: إذا استبدلنا $<$ بـ $\leq$ و $>$ بـ $\geq$ نقول , فقط, متزايدة , متناقصة , رتيبة, فتنبه!!

4) نقول عن متتالية عددية (u_n) إنها **محدودة من الأعلى** بالعدد M إذا كان :

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < M$.

5) نقول عن متتالية عددية (u_n) إنها **محدودة من الأسفل** بالعدد m إذا كان :

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > m$.

نهاية متتالية عددية :

• المتتالية (u_n) تنتهي إلى العدد الحقيقي l , يعني أن كل مجال $]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$ يشمل كل حدود المتتالية (u_n) ابتداءا من رتبة معينة p ونكتب : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ أو $\lim u_n = l$

ونقول في هذه الحالة إن **المتتالية (u_n) متقاربة** (متقاربة نحو l)

يمكن أن نتخيل هذا بالطريقة الآتية :

$$u_0, u_1, u_2, ..., \underbrace{u_p, ..., u_n, ...}_{]l-\varepsilon, l+\varepsilon[}$$

• المتتالية (u_n) تنتهي إلى $+\infty$, يعني أن كل مجال $]A, +\infty[$ يشمل كل حدود المتتالية (u_n) ابتداءا من رتبة معينة p ونكتب : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ أو $\lim u_n = +\infty$

• المتتالية (u_n) تنتهي إلى $-\infty$, يعني أن كل مجال $]-\infty, B[$ يشمل كل حدود المتتالية (u_n) ابتداءا من رتبة معينة p ونكتب : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ أو $\lim u_n = -\infty$

في هذه التعاريف , A و B و ε أعداد حقيقية مع $\varepsilon > 0$. و تكون لهذه الأعداد أهمية إذا كان A كبيرا جدا وكان B صغيرا جدا (سالب) و ε قريب جدا من الصفر.

ملاحظة: نقول إن **المتتالية (u_n) متباعدة** إذا لم تكن لها نهاية أو إذا كان $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \pm\infty$

نهاية متتالية عددية مرفقة بدالة :

إذا كانت (u_n) متتالية معرفة كما يلي : $u_n = f(n)$ حيث f دالة معرفة على المجال $]A, +\infty[$ مع A عدد حقيقي و كانت $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$

أي نتعامل مع المتتالية كما نتعامل مع دالة، من حيث استعمال قواعد حساب النهايات

مثال : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n+2}{n^2+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{n^2} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

نهاية متتالية عددية باستعمال الحصر : (u_n) ، (v_n) ، (w_n) ثلاث متتاليات عددية
إذا كان ابتداءا من عدد طبيعي n_0 ، $v_n < u_n < w_n$ وكانت $\lim v_n = l$ و $\lim w_n = l$
حيث l عدد حقيقي فإن $\lim u_n = l$.

فمثلا : لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = n + \cos n$
نعلم أن $-1 \le \cos n \le +1$ وبإضافة n إلى الأطراف نجد $n-1 \le n+\cos n \le +1+n$
وبما أن $\lim(n+1) = +\infty$ و $\lim(n-1) = +\infty$ فإن $\lim u_n = +\infty$.

المتتاليتان المتجاورتان : نقول عن متتاليتين عدديتين (u_n) و (v_n) إنهما متجاورتان
إذا كانت إحداهما متناقصة والأخرى متزايدة وكانت $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.

نتيجة : المتتاليتان المتجاورتان متقاربتان ولهما نفس النهاية.

البرهان بالتراجع

مبدأ البرهان بالتراجع	لتكن $p(n)$ خاصية تتعلق بعدد طبيعي n , (قد تكون مساواة أو متباينة أو... , مكتوبة بدلالة n) و ليكن n_0 عددا طبيعيا معطى. **إذا كان :** **(1)** $p(n_0)$ صحيحة. ($p(n)$ صحيحة من أجل $n = n_0$) **(2)** من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \ge n_0$ إذا كانت $p(n)$ صحيحة فإن $p(n+1)$ صحيحة. **فإن :** من أجل كل عدد طبيعي n , $p(n)$ صحيحة.

مثال : لنبرهن بالتراجع أن مجموع الأعداد الطبيعية الفردية يساوي n^2 .
معناه $S_n = 1+3+5+...+(2n-1) = n^2$ وهذه هي الخاصية $p(n)$
(1) من أجل $n=1$, لدينا $S_1 = 1$ و $1^2 = 1$ ومنه الخاصية $p(1)$ صحيحة.
(2) نفرض أن $p(n)$ صحيحة من أجل الرتبة n .أي أن $S_n = n^2$ (فرض التراجع).
ونبرهن أن $p(n)$ صحيحة من أجل الرتبة $n+1$. أي أن $S_{n+1} = (n+1)^2$
لدينا
$S_{n+1} = 1+3+5+...+(2n-1)+(2n+1)$
ومنه $S_{n+1} = S_n + (2n+1)$ وباستعمال فرضية التراجع نجد $S_{n+1} = n^2 + (2n+1)$
وبالتالي $S_{n+1} = (n+1)^2$.
الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n أكبر أو يساوي 1 , $p(n)$ صحيحة.

التمرين86

1) احسب $u_0 , u_1 , u_2 , u_3 , u_4 , u_5$ من أجل كل متتالية (u_n) من المتتاليات الآتية :
$u_0 = -3, u_{n+1} = u_n + 2$ ...(1) ، $u_0 = +4, u_{n+1} = 2u_n$ ...(2)
$u_0 = +1, u_{n+1} = (n+1)u_n$ ...(4) ، $u_0 = 0, u_{n+1} = u_n + n + 1$ ...(3)
2) استنتج $u_n = f(n)$ ثم برهن على صحته بالتراجع.

الحل

$u_0 = -3, u_{n+1} = u_n + 2$ ...(1)

1) $u_0 = -3$, $u_1 = -3+2 = -1$, $u_2 = 1$, $u_3 = 3$, $u_4 = 5$, $u_5 = 7$, ...
2) التخمين : $u_2 = 1$ ، $u_3 = 3$ ، $u_4 = 5$ ، $u_5 = 7$ .... هي متتالية الأعداد الفردية
والشكل العام للأعداد الفردية هو $2k+\alpha$ وبمقارنة هذا الشكل بحدود المتتالية نجد
الشكل المناسب هو : $2k-3$ وبالتالي : $u_n = f(n) = 2n-3$
لنبرهن , بالتراجع , على أن:
من أجل كل عدد طبيعي n , $u_n = 2n-3$, نسمي هذه الخاصية $p(n)$
(1) من أجل $n = 0$, لدينا $u_0 = 2(0)-3 = -3$ و $u_0 = -3$ ومنه الخاصية $p(0)$ صحيحة
(2) نفرض أن $p(n)$ صحيحة من أجل الرتبة n .
أي نفرض أن $u_n = 2n-3$ (وهو فرض التراجع).
ونبرهن أن $u_{n+1} = 2(n+1)-3 = 2n-1$.
لدينا $u_{n+1} = u_n + 2$ وباستعمال فرض التراجع نجد $u_{n+1} = (2n-3)+2 = 2n-1$
الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n , $p(n)$ صحيحة.

$u_0 = 4, u_{n+1} = 2u_n$ ...(2)

1) $u_0 = +4$, $u_1 = 2u_0 = 8$, $u_2 = 16$, $u_3 = 32$, $u_4 = 64$, ...
2) التخمين: نكتب كل حد على الشكل $4k$ فنجد :
$u_0 = 4\times1$, $u_1 = 4\times2$, $u_2 = 4\times4$, $u_3 = 4\times8$, $u_4 = 4\times16$, ...
لاحظ أن الأعداد : 1 , 2 , 4 , 8 , 16 , ... هي قوى العدد 2 المختلفة
أي أن شكلها هو : 2^n وبالتالي كل حد يكتب على الشكل 4×2^n
ومنه : $u_n = f(n) = 4\times2^n$.
لنبرهن , بالتراجع , على أن:

من أجل كل عدد طبيعي n , $u_n = 4\times 2^n$, نسمي هذه الخاصية $p(n)$

(1) من أجل $n=0$, لدينا $u_0 = 4\times 2^0 = 4$ و $u_0=4$ ومنه الخاصية $p(0)$ صحيحة.

(2) نفرض أن $p(n)$ صحيحة من أجل الرتبة n .

أي نفرض أن $u_n = 4\times 2^n$ (وهو فرض التراجع).

ونبرهن أن $u_{n+1} = 4\times 2^{n+1}$.

لدينا $u_{n+1} = 2u_n$ وباستعمال فرض التراجع نجد $u_{n+1} = 2\left(4\times 2^n\right) = 4\times 2^{n+1}$

الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n , $p(n)$ صحيحة.

التمرين 87

لتكن (u_n) متتالية معرفة كما يلي : $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 1$.

برهن , بالتراجع , على أنه من أجل كل $n\ge 0$, $u_n \ge -2$.

الحل

نرمز بالرمز $p(n)$ لهذه الخاصية .

1) من أجل $n=0$, لدينا $u_0=1$ ومنه $u_0 \ge -2$. إذن $p(0)$ صحيحة.

2) نفرض أن $p(n)$ صحيحة من أجل الرتبة n, أي أن $u_n \ge -2$ (فرض التراجع)

ونبرهن أن $p(n)$ صحيحة من أجل الرتبة $n+1$. أي أن $u_{n+1}\ge -2$

حسب فرض التراجع لدينا $u_n \ge -2$, وبضرب الطرفين في العدد $\frac{1}{2}$ نجد : $\frac{1}{2}u_n \ge -1$

وبإضافة العدد (-1) إلى الطرفين نجد $\frac{1}{2}u_n - 1 \ge -2$ ومنه $u_{n+1}\ge -2$.

الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n, $p(n)$ صحيحة.

التمرين 88

برهن , بالتراجع , الخواص الآتية :

1) من أجل كل عدد طبيعي $n\ge 1$, $2^n > n$.

2) من أجل كل عدد طبيعي $n\ge 1$, يقبل العدد $\left(3^{2n}-2^n\right)$ القسمة على 7 .

3) من أجل كل عدد طبيعي $n\ge 1$, $1^3+2^3+...+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

الحل

1) نرمز بالرمز $p(n)$ لهذه الخاصية .

• من أجل $n=1$, لدينا $2^1=2$ ومنه $2^1>1$. إذن $p(1)$ صحيحة.

• نفرض أن $p(n)$ صحيحة من أجل الرتبة n, أي أن $2^n>n$ (فرض التراجع)

ونبرهن أن $p(n)$ صحيحة من أجل الرتبة $n+1$. أي أن $2^{n+1}>n+1$

حسب فرض التراجع لدينا $2^n>n$, وبضرب الطرفين في العدد 2 نجد : $2^{n+1}>2n$

وبما أن $2^{n+1}>n+n$ و $n\ge 1$ فإن $2^{n+1}>n+n\ge n+1$. إذن $2^{n+1}>n+1$

الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي $n\ge 1$, $p(n)$ صحيحة.

2) نرمز بالرمز $p(n)$ لهذه الخاصية .

• من أجل $n=1$, لدينا $3^{2\times 1}-2^1=7$ و 7 يقبل القسمة على 7 . إذن $p(1)$ صحيحة.

• نفرض أن $p(n)$ صحيحة من أجل الرتبة n, أي أن العدد $\left(3^{2n}-2^n\right)$ يقبل القسمة على 7 (فرض التراجع).

ونبرهن أن $p(n)$ صحيحة من أجل الرتبة $n+1$. أي أن العدد $\left(3^{2n+2}-2^{n+1}\right)$ يقبل القسمة على 7 .

لدينا

$$3^{2n+2}-2^{n+1} = 3^{2n}\times 3^2 - 2^n\times 2 = 9\times 3^{2n} - 2\times 2^n$$

$$= (7+2)\times 3^{2n} - 2\times 2^n = 7\times 3^{2n} + 2\left(3^{2n}+3^{2n}\right)$$

بما أن العدد $\left(3^{2n}+3^{2n}\right)$ يقبل القسمة على 7 (حسب الفرض) والعدد 7×3^{2n} يقبل القسمة على 7 (لأنه جداء عوامل أحدها يقبل القسمة على 7) فإن مجموعهما يقبل القسمة على 7.

الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي $n\ge 1$, $p(n)$ صحيحة.

3) نرمز بالرمز $p(n)$ لهذه الخاصية .

• من أجل $n=1$, لدينا $1^3=1$ و $\frac{1^2(1+1)^2}{4}=\frac{4}{4}=1$. إذن $p(1)$ صحيحة.

• نفرض أن $p(n)$ صحيحة من أجل الرتبة n, أي أن :

$$1^3+2^3+...+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$ (فرض التراجع)

ونبرهن أن $p(n)$ صحيحة من أجل الرتبة $n+1$. أي أن :

$$1^3+2^3+...+(n+1)^3=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

ليكن الطرف الأول من هذه المساواة $1^3+2^3+...+(n+1)^3$, بإظهار الحد n^2 يصبح شكل الطرف الأول كما يلي : $1^3+2^3+...+n^2+(n+1)^3$.

وحسب فرض التراجع لدينا $1^3+2^3+...+n^2+(n+1)^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3$

$$=\frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^3}{4}=\frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

وهذا هو الطرف الثاني من المساواة المراد إثباتها.

الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي $n\ge1$, $p(n)$ صحيحة.

التمرين89

لتكن (u_n) متتالية معرفة كما يلي : $u_0=2$ و $u_{n+1}=\sqrt{1+\frac{1}{2}u_n}$.

برهن , بالتراجع , على أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 2 .

الحل

نبرهن , بالتراجع , أنه من أجل كل عدد طبيعي n, $u_n\le2$.

1) نرمز بالرمز $p(n)$ لهذه الخاصية .

- من أجل $n=0$, لدينا $u_0=2$ ومنه $u_0\le2$. إذن $p(0)$ صحيحة.
- نفرض أن $p(n)$ صحيحة من أجل الرتبة n, أي أن $u_n\le2$ (فرض التراجع)

ونبرهن أن $p(n)$ صحيحة من أجل الرتبة $n+1$. أي أن $u_{n+1}\le2$

حسب فرض التراجع لدينا $u_n\le2$, وبضرب الطرفين في العدد $\frac{1}{2}$ نجد : $\frac{1}{2}u_n\le1$

وبإضافة العدد 1 إلى الطرفين نجد : $\frac{1}{2}u_n+1\le2$.

وبما أن الطرفين موجبان فإن $\frac{1}{2}u_n+1\le2$ تكافئ $\sqrt{\frac{1}{2}u_n+1}\le\sqrt{2}$

وبما أن $\sqrt{2}\le2$ فإن $\sqrt{\frac{1}{2}u_n+1}\le2$

الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n, $p(n)$ صحيحة.

التمرين90

لتكن (u_n) متتالية معرفة كما يلي : $u_0=3$ و $u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{4}{u_n}\right)$.

1) ادرس , على المجال $]2,+\infty[$, تغيرات الدالة f المعرفة كما يلي :

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{4}{x}\right)$$

2) برهن , بالتراجع , أنه من أجل كل عدد طبيعي n, $2\le u_n\le4$.

الحل

1) من أجل كل x من $]2,+\infty[$, $f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2-4}{x^2}\right)$

إذن إشارة $f'(x)$ من إشارة (x^2-4). ومنه من أجل كل x من $]2,+\infty[$, $f'(x)\ge0$

وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $]2,+\infty[$.

2) نرمز بالرمز $p(n)$ لهذه الخاصية .

- من أجل $n=0$, لدينا $u_0=3$ ومنه $2\le u_0\le4$. إذن $p(0)$ صحيحة.
- نفرض أن $p(n)$ صحيحة من أجل الرتبة n, أي أن $2\le u_n\le4$ (فرض التراجع)

ونبرهن أن $p(n)$ صحيحة من أجل الرتبة $n+1$. أي أن $2\le u_{n+1}\le4$

حسب فرض التراجع لدينا $2\le u_n\le4$, بقلب أطراف المتباينة نجد :

$\frac{1}{4}\le\frac{1}{u_n}\le\frac{1}{2}$ وبجمع هذه المتباينة مع المتباينة $2\le u_n\le4$ نجد :

$\frac{1}{4}+4\le u_n+\frac{1}{u_n}\le\frac{1}{2}+4$ ومنه $\frac{17}{4}\le u_n+\frac{1}{u_n}\le\frac{9}{2}$ وبضرب الأطراف في $\frac{1}{2}$ نجد:

$\frac{17}{8}\le\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{1}{u_n}\right)\le\frac{9}{4}$ وبما أن $2\le\frac{17}{8}$ و $\frac{9}{4}\le4$ فإن $2\le\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{1}{u_n}\right)\le4$

الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n , $p(n)$ صحيحة.

التمرين 91

لتكن (u_n) متتالية معرفة كما يلي : $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \dfrac{7u_n + 6}{u_n + 2}$.

1) برهن , بالتراجع , أنه من أجل كل $n > 0$, $u_n > 0$.

2) بين أنه من أجل كل $n > 0$, $|u_{n+1} - 6| \le \frac{1}{2}|u_n - 6|$.

3) استنتج , باستعمال البرهان بالتراجع , أنه من أجل كل $n > 0$:

$$|u_n - 6| \le \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - 6|.$$

4) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو 6 .

الحل

1) نرمز بالرمز $p(n)$ لهذه الخاصية .

• من أجل $n = 1$, لدينا $u_1 = \dfrac{7u_0 + 6}{u_0 + 2} = \dfrac{13}{3}$ ومنه $u_1 > 0$. إذن $p(1)$ صحيحة.

• نفرض أن $p(n)$ صحيحة من أجل الرتبة n, أي أن $u_n > 0$ (فرض التراجع)

ونبرهن أن $p(n)$ صحيحة من أجل الرتبة $n+1$. أي أن $u_{n+1} > 0$

بما أن $u_n > 0$ (فرض التراجع) فإن $\dfrac{7u_n + 6}{u_n + 2} > 0$ ومنه $u_{n+1} > 0$.

الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي $n \ge 1$, $p(n)$ صحيحة.

2) من أجل كل $n > 0$, $|u_{n+1} - 6| = \left|\dfrac{7u_n + 6}{u_n + 2} - 6\right| = \left|\dfrac{u_n - 6}{u_n + 2}\right|$.

وبما أنه من أجل كل $n > 0$, $u_n > 0$, فإن $\dfrac{u_n - 6}{u_n + 2} < \dfrac{u_n - 6}{2}$

ومنه $|u_{n+1} - 6| < \left|\dfrac{u_n - 6}{2}\right|$ وبالتالي $|u_{n+1} - 6| < \frac{1}{2}|u_n - 6|$.

3) نرمز بالرمز $p(n)$ لهذه الخاصية .

• من أجل $n = 1$, لدينا $|u_1 - 6| \le \left(\frac{1}{2}\right)^1 |u_0 - 6|$ ومنه $\left|\frac{13}{3} - 6\right| \le \frac{5}{2}$ وبالتالي $\frac{5}{3} \le \frac{5}{2}$

إذن $p(1)$ صحيحة.

• نفرض أن $p(n)$ صحيحة من أجل الرتبة n , أي أن :

$$|u_n - 6| \le \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - 6| \quad \text{(فرض التراجع)}$$

ونبرهن أن $p(n)$ صحيحة من أجل الرتبة $n+1$, أي أن :

$$|u_{n+1} - 6| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - 6|.$$

لدينا من أجل كل $n > 0$, $|u_{n+1} - 6| < \frac{1}{2}|u_n - 6|$ (من السؤال السابق)

وحسب فرض التراجع لدينا $|u_{n+1} - 6| \le \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - 6|$

ومنه $|u_{n+1} - 6| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - 6|$

الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي $n \ge 1$, $p(n)$ صحيحة.

4) استنتاج تقارب المتتالية (u_n) نحو 6 .

لدينا $|u_n - 6| \le \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - 6|$, إذن $0 \le \lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - 6| \le \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - 6|$

بما أن $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - 6| = 0$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - 6| = 0$.

وبالتالي $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 6$ ومنه المتتالية (u_n) متقاربة نحو 6 .

التمرين 92

لتكن (u_n) متتالية معرفة كما يلي : $u_0 = 5$ و $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12}$.

1) برهن , بالتراجع , أنه من أجل كل n , $u_n > 0$.

2) بين أنه من أجل كل n , $|u_{n+1} - 4| \le \frac{1}{4}|u_n - 4|$.

3) استنتج , باستعمال البرهان بالتراجع , أنه من أجل كل n:

$$|u_n - 4| \le \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

4) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو نهاية يطلب تعيينها.

الحل

1) نرمز بالرمز $p(n)$ لهذه الخاصية .

• من أجل $n=0$, لدينا $u_0=5$ ومنه $u_0>0$. إذن $p(0)$ صحيحة.

• نفرض أن $p(n)$ صحيحة من أجل الرتبة n , أي أن $u_n>0$ (فرض التراجع)

ونبرهن أن $p(n)$ صحيحة من أجل الرتبة $n+1$. أي أن $u_{n+1}>0$

بما أن $u_n>0$ (فرض التراجع) فإن $\sqrt{u_n+12}>0$ ومنه $u_{n+1}>0$.

الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n , $p(n)$ صحيحة.

2) من أجل كل n , $|u_{n+1}-4|=|\sqrt{u_n+12}-4|=\left|\frac{u_n-4}{\sqrt{u_n+12}+4}\right|\le\left|\frac{u_n-4}{4}\right|$.

(بضرب البسط والمقام في مرافق $\sqrt{u_n+12}-4$)

وبالتالي : $|u_{n+1}-4|\le\frac{1}{4}|u_n-4|$

3) نرمز بالرمز $p(n)$ لهذه الخاصية .

• من أجل $n=0$, لدينا $|u_0-4|\le\left(\frac{1}{4}\right)^0$ ومنه $|5-6|\le 1$ وبالتالي $1\le 1$

إذن $p(0)$ صحيحة.

• نفرض أن $p(n)$ صحيحة من أجل الرتبة n , أي أن :

$|u_n-4|\le\left(\frac{1}{4}\right)^n$ (فرض التراجع) , ونبرهن أن $p(n)$ صحيحة من أجل الرتبة

$n+1$, أي أن : $|u_{n+1}-4|\le\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$.

لدينا من أجل كل n , $|u_{n+1}-4|\le\frac{1}{4}|u_n-4|$ (من السؤال السابق)

وحسب فرض التراجع لدينا $|u_{n+1}-4|\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n$. ومنه $|u_{n+1}-4|\le\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n , $p(n)$ صحيحة.

4) استنتاج تقارب المتتالية (u_n).

لدينا $0\le|u_n-4|\le\left(\frac{1}{4}\right)^n$, إذن $0\le\lim_{n\to+\infty}|u_n-4|\le\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

بما أن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$ فإن $\lim_{n\to+\infty}|u_n-4|=0$.

وبالتالي $\lim_{n\to+\infty}u_n=4$ ومنه المتتالية (u_n) متقاربة نحو 4 .

التمرين 93

احسب , من أجل كل n من $\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n$ وأعط اتجاه تغير المتتالية (u_n) في الحالات الآتية :

1) $u_n=3-\frac{1}{2}n$. 2) $u_n=n^2-n$. 2) $\begin{cases}u_0=0\\ u_{n+1}=u_n-\frac{1}{n+1}\end{cases}$

الحل

1) **حساب** $u_{n+1}-u_n$.

من أجل كل n من $\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n=3-\frac{1}{2}(n+1)-\left[3-\frac{1}{2}n\right]=-\frac{1}{2}$

اتجاه تغير المتتالية (u_n).

المتتالية (u_n) متناقصة تماما لأن : من أجل كل n من $\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n<0$

2) **حساب** $u_{n+1}-u_n$.

من أجل كل n من $\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n=(n+1)^2-(n+1)-(n^2-n)=2n$

اتجاه تغير المتتالية (u_n).

المتتالية (u_n) متزايدة لأن : من أجل كل n من $\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n\ge 0$

3) **حساب** $u_{n+1}-u_n$.

من أجل كل n من $\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n=-\frac{1}{n+1}$

اتجاه تغير المتتالية (u_n).

المتتالية (u_n) متناقصة تماما لأن : من أجل كل n من $\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n<0$

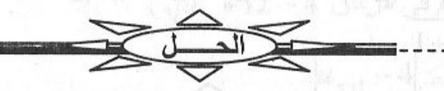
التمرين 94

ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ في كل حالة من الحالات الآتية :

$...(1)\quad u_n=-2n+3$ ، $...(2)\quad u_n=\dfrac{2-4n}{n+2}$ ، $...(3)\quad u_n=(n-5)^2$

$...(4)\quad u_n=\dfrac{3^{2n}}{2^{3n}}$ ، $...(5)\quad u_n=\dfrac{n^2+1}{2n}$ ، $...(6)\quad \begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=u_n+2n \end{cases}$

$...(7)\quad u_n=\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{2n}$ ، $...(8)\quad u_n=-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n}$



دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n=-2n+3 \quad ...(1)$

1) نحسب u_{n+1} : $u_{n+1}=-2(n+1)+3=-2n+1$

2) نحسب الفرق $u_{n+1}-u_n$: $u_{n+1}-u_n=-2n+1-(-2n+3)=-2$

3) بما أن $u_{n+1}-u_n<0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n=\dfrac{2-4n}{n+2} \quad ...(2)$

1) نحسب u_{n+1} : $u_{n+1}=\dfrac{2-4(n+1)}{(n+1)+2}=\dfrac{-4n-2}{n+3}$

2) نحسب الفرق $u_{n+1}-u_n$: $u_{n+1}-u_n=\dfrac{-4n-2}{n+3}-\dfrac{2-4n}{n+2}=\dfrac{-10}{(n+3)(n+2)}$

3) بما أن $u_{n+1}-u_n<0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n=(n-5)^2 \quad ...(3)$

1) نحسب u_{n+1} : $u_{n+1}=(n+1-5)^2=(n-4)^2$

2) نحسب الفرق $u_{n+1}-u_n$:

$$u_{n+1}-u_n=(n-4)^2-(n-5)^2=(n-4-n+5)(n-4+n-5)=2n-9$$

3) إذا كان $n\le 5$ فإن $u_{n+1}-u_n<0$ وبالتالي : المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

وإذا كان $n\ge 5$ فإن $u_{n+1}-u_n>0$ وبالتالي : المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n=\dfrac{3^{2n}}{2^{3n}} \quad ...(4)$

1) نحسب u_{n+1} : $u_{n+1}=\dfrac{3^{2(n+1)}}{2^{3(n+1)}}=\dfrac{3^{2n+2}}{2^{3n+3}}$

2) نحسب الفرق $u_{n+1}-u_n$:

$$u_{n+1}-u_n=\frac{3^{2n+2}}{2^{3n+3}}-\frac{3^{2n}}{2^{3n}}=\frac{3^{2n}}{2^{3n}}\left(\frac{9}{8}-1\right)=\frac{1}{8}\times\frac{3^{2n}}{2^{3n}}$$

3) بما أن $u_{n+1}-u_n>0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n=\dfrac{n^2+1}{2n} \quad ...(5)$

1) نحسب u_{n+1} : $u_{n+1}=\dfrac{(n+1)^2+1}{2(n+1)}=\dfrac{n^2+2n+2}{2n+2}$

2) نحسب الفرق $u_{n+1}-u_n$:

$$u_{n+1}-u_n=\frac{n^2+2n+2}{2n+2}-\frac{n^2+1}{2n}=\frac{n^2+n-1}{2n(n+1)}$$

3)من أجل $n\ge 1$ لدينا : $n^2+n-1>0$

وبما أن $2n(n+1)>0$ فإن $u_{n+1}-u_n>0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=u_n+2n \end{cases} \quad ...(6)$

من العلاقة التراجعية : $u_{n+1}=u_n+2n$ نستنتج : $u_{n+1}-u_n=2n$

وبالتالي : $u_{n+1}-u_n>0$ ومنه المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n=\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{2n} \quad ...(7)$

بما أن $2n$ زوجي فإن $u_n=\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{2n}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2n}$

1) نحسب u_{n+1} : $u_{n+1}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2(n+1)}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2n+2}=\dfrac{4}{9}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2n}$

2) نحسب الفرق : $u_{n+1}-u_n$

$$u_{n+1}-u_n=\left(\frac{2}{3}\right)^{2n+2}-\left(\frac{2}{3}\right)^{2n}=\left(\frac{2}{3}\right)^{2n}\left(\frac{4}{9}-1\right)=-\frac{5}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{2n}$$

3) بما أن $u_{n+1}-u_n<0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n=-\left(\frac{2}{3}\right)^n \quad ...(8)$

1) نحسب u_{n+1} :

$$u_{n+1}=-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}=-\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

2) نحسب الفرق $u_{n+1}-u_n$:

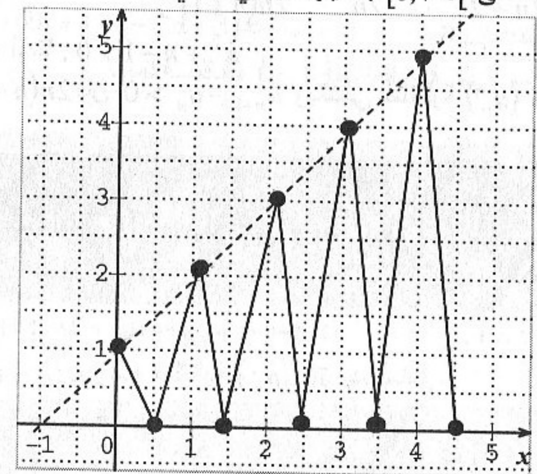
$$u_{n+1}-u_n=-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+\left(\frac{2}{3}\right)^n=\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(-\frac{2}{3}+1\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

3) بما أن $u_{n+1}-u_n>0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.



التمرين95

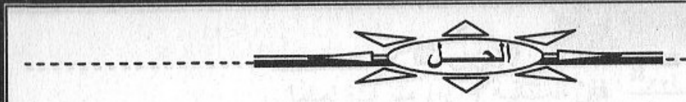
تكن الدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ بتمثيلها البياني التالي :



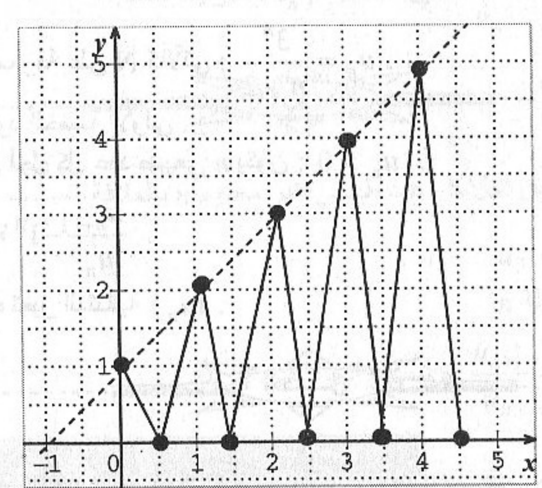
1) هل الدالة f رتيبة ؟

2) نسمي (u_n) المتتالية المعرفة بـ: $u_n=f(n)$. عبر عن الحد العام u_n بدلالة n .

3) أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة .



الحل



1) رتابة الدالة f : الدالة f ليست رتيبة لأن المنحني الممثل لها يلاحظ عليه النزول(متناقصة) ثم الصعود(متزايدة) وهكذا...

2) التعبير عن الحد العام u_n بدلالة n

التخمين : بما أن $f(0)=1$ فإن $u_0=1$ و بما أن $f(1)=2$ فإن $u_1=2$ وهكذا...

وبالتالي : $u_n=n+1$

لنبرهن , بالتراجع , على أن:

من أجل كل عدد طبيعي n , $u_n=n+1$, نسمي هذه الخاصية $p(n)$

(1) من أجل $n=0$, لدينا $u_0=0+1=1$ و $u_0=1$ ومنه الخاصية $p(0)$ صحيحة.

(2) نفرض أن $p(n)$ صحيحة من أجل الرتبة n .

أي نفرض أن $u_n=n+1$ (وهو فرض التراجع). ونبرهن أن $u_{n+1}=n+2$.

لدينا $u_{n+1}=u_n+1$ وباستعمال فرض التراجع نجد $u_{n+1}=(n+1)+1=n+2$

الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n , $p(n)$ صحيحة.

3) المتتالية (u_n) متزايدة

نحسب الفرق $u_{n+1}-u_n$: $u_{n+1}-u_n=(n+2)-(n+1)=1$

3) بما أن $u_{n+1}-u_n>0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

التمرين96

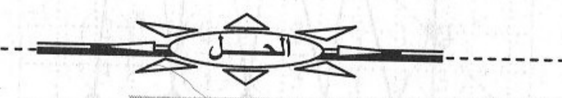
(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كالآتي : $u_n = \frac{3^n}{n+2}$.

1) احسب الحدود الخمسة الأولى . .

2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $u_n > 0$.

3) ادرس إشارة $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1$.

4) استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .



(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كالآتي : $u_n = \frac{3^n}{n+2}$.

1) حساب الحدود الخمسة الأولى :

$$u_0 = \frac{3^0}{0+2} = \frac{1}{2} \ , \ u_1 = \frac{3^1}{1+2} = 1$$

$$u_2 = \frac{3^2}{2+2} = \frac{9}{4} \ , \ u_3 = \frac{3^3}{3+2} = \frac{27}{5} \ , \ u_4 = \frac{3^4}{4+2} = \frac{81}{6}$$

2) من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $u_n > 0$

بما أن من كل عدد طبيعي n ، $3^n > 0$ و $n+1 > 0$ فإن $\frac{3^n}{n+2} > 0$ وبالتالي $u_n > 0$

ملاحظة: يمكن تسمية هذه الخاصية $p(n)$ وإثبات صحتها بالتراجع.

3) دراسة إشارة $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \frac{\frac{3^{n+1}}{n+3}}{\frac{3^n}{n+2}} - 1 = \frac{3^{n+1}}{n+3} \times \frac{n+2}{3^n} - 1$$

$$= \frac{3(n+2)}{n+3} - 1 = \frac{2n+3}{n+3} > 0$$

ومنه $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 > 0$ وبالتالي : $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$

4) استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

بما أن $u_n > 0$ و $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.



(u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بالعلاقة : $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

1) احسب u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 .

2) عبر عن u_{n+1} بدلالة n .

3) برهن أن $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+2}$ ثم استنتج اتجاه تغير (u_n)



(u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بالعلاقة : $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

1) حساب u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 :

$$u_1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{1+1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$u_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3+1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} , \ u_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$u_4 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4+1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$$

2) التعبير عن u_{n+1} بدلالة n

$$u_{n+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

3) برهان أن $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+2}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}} = \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \frac{n}{n+2}$$

استنتاج اتجاه تغير (u_n) لدينا $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$

بما أن $u_n>0$ (لأن $\frac{1}{n(n+1)}>0$) و $\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$ (لأن $\frac{n}{n+2}<1$)

فإن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

التمرين98

(u_n) متتالية عددية معرفة على N بحدها العام u_n حيث : $u_n=\frac{n-2}{n+3}$.

1) احسب u_0 , u_1 , u_2 , u_3 .

2) برهن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

الحل

1) حساب $u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3$: $u_3=\frac{1}{6} , u_2=0 , u_1=\frac{-1}{4} , u_0=\frac{-2}{3}$

2) المتتالية (u_n) متزايدة تماما: لدينا $u_{n+1}-u_n=\frac{n-1}{n+4}-\frac{n-2}{n+3}=\frac{+5}{(n+4)(n+3)}$

إذن $u_{n+1}-u_n>0$, لأن $\frac{+5}{(n+4)(n+3)}>0$.

ومنه المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

التمرين99

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها العام u_n حيث : $u_n=\frac{4-n}{n+3}$.

1) احسب u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3.

2) برهن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

الحل

1) حساب $u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3$: $u_3=\frac{1}{6}$ ، $u_2=\frac{2}{7}$, $u_1=\frac{3}{4}$ ، $u_0=\frac{4}{3}$

2) المتتالية (u_n) متناقصة تماما: لدينا $u_{n+1}-u_n=\frac{3-n}{n+4}-\frac{4-n}{n+3}=\frac{-7}{(n+4)(n+3)}$

إذن $u_{n+1}-u_n<0$, لأن $\frac{-7}{(n+4)(n+3)}<0$

ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

التمرين100

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها العام u_n حيث : $u_n=\sqrt{2n+1}$.

1) احسب u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3

2) برهن أن المتتالية (u_n) متزايدة تمتما.

الحل

1) حساب $u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3$: $u_3=\sqrt{7} , u_2=\sqrt{5} , u_1=\sqrt{3} , u_0=+1$

2) المتتالية (u_n) متزايدة تماما: لدينا $u_{n+1}=\sqrt{2n+3}$

نعلم أن $2n+3>2n+1$ وبما أن الطرفين موجبان فإن: $\sqrt{2n+3}>\sqrt{2n+1}$

وبالتالي: $u_{n+1}>u_n$ ومنه المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

التمرين101

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها العام u_n حيث : $u_n=\sqrt{16-2n}$.

1) عين مجموعة تعريف (u_n) .

2) احسب u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 .

3) برهن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

الحل

1) مجموعة تعريف (u_n) : تكون (u_n) معرفة إذا كان $16-2n\geq 0$, أي $n\leq 8$

ومنه مجموعة التعريف هي : $D=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$.

2) حساب $u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3$: $u_3=\sqrt{10} , u_2=\sqrt{12} , u_1=\sqrt{14} , u_0=+4$

2) المتتالية (u_n) متناقصة تماما: يمكن حساب بقية الحدود , وهي ليست كثيرة , لاكتشاف

أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

التمرين 102

جد نهاية المتتالية (u_n) في كل حالة من الحالات الآتية :

$u_n=\frac{1}{n}-3n^2...(1)$ ، $u_n=\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}-3...(2)$ ، $u_n=(1-\sqrt{n})\left(2+\frac{3}{n}\right)...(3)$.

$u_n=\frac{1}{n\sqrt{n}}...(4)$ ، $u_n=\frac{(-1)^n}{n^2}...(5)$ ، $u_n=\frac{\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)}{3n^2}...(6)$

$u_n=(0.9)^n...(7)$ ، $u_n=\left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^n...(8)$ ، $u_n=\frac{1}{3^n}...(9)$ ، $u_n=\frac{n+1}{3n+1}...(10)$

الحل

1) $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}-3n^2\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}+\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-3n^2\right)=-\infty$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}-3\right)=-3$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\sqrt{n})\left(2+\frac{3}{n}\right)=(-\infty)(2)=-\infty$

4) $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}=0$

5) إذا كان n فرديا فإن $u_n=\frac{-1}{n^2}$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-1}{n^2}=0$

و إذا كان n زوجيا فإن $u_n=\frac{1}{n^2}$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}=0$

الخلاصة : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$

6) لدينا $-1\le\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\le+1$ وبقسمة الطرفين على $3n^2$ نجد

$\frac{-1}{3n^2}\le\frac{\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)}{3n^2}\le\frac{+1}{3n^2}$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-1}{3n^3}\le\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)}{3n^2}\le\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{+1}{3n^2}$

وبالتالي $0\le\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)}{3n^2}\le 0$ والخلاصة هي : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)}{3n^2}$.

7) $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(0.9)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{9^n}{10^n}=0$

لاحظ أننا طبقنا التزايد المقارن لقوى عدد .

المتتالية الحسابية :

أمثلة : اكتب : متتالية الأعداد الطبيعية الأكبر من 7 . متتالية الأعداد الطبيعية الزوجية .
الأعداد الطبيعية الفردية.الأعداد الطبيعية المضاعفة للعدد 5.
الأعداد الطبيعية التي تقبل القسمة على 9.

نلاحظ أن كل حد من حدود هذه المتتاليات – عدا الحد الأول – هو مجموع الحد الذي قبله ونفس العدد الحقيقي.ومنه :

(1) نسمي **متتالية حسابية أساسها r** كل متتالية عددية (u_n) معرفة على **N** كما يلي :

$$u_{n+1}=u_n+r$$

نتيجة : تتعين متتالية حسابية إذا عُلم حدها الأول (u_0 أو u_1 على سبيل المثال) وعُلم أساسها .

فحدود المتتالية الحسابية المعرفة على **N** التي حدها الأول $u_0=-1$ وأساسها $r=\frac{1}{2}$ هي:

$u_0=-1, u_1=u_0+r=-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}, u_2=u_1+r=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0,...$

نتيجة : من $u_{n+1}=u_n+r$ و $u_n=u_{n-1}+r$ ينتج : $u_n=\frac{u_{n-1}+u_{n+1}}{2}$

ويسمى u_n الوسط الحسابي للعددين u_{n-1} و u_{n+1} ، وهما حدان يحصران u_n.

وبالتالي نقول عن أعداد حقيقية : a,b,c ، بهذا الترتيب ، **" أنها حدود متتابعة من متتالية حسابية"** إذا وفقط إذا تحققت العلاقة : $2b=a+c$.

(2) الحد العام لمتتالية حسابية : لتكن (u_n) متتالية حسابية , حدها الأول u_0 وأساسها r .

إن حساب حد رتبته كبيرة بالطريقة التراجعية السابقة يطول ويطول لهذا نستعين بعبارة الحد العام وهذه صيغتها :

① الحد الأول للمتتالية الحسابية هو u_0 ، $u_n=u_0+nr$

② الحد الأول للمتتالية الحسابية هو u_1 ، $u_n=u_1+(n-1)r$

② الحد الأول للمتتالية الحسابية هو u_p ، $u_n = u_p + (n-p)r$

فعبارة الحد العام حسب معطيات المثال السابق هي : $u_n = -1+\frac{1}{2}n$ وبالتالي يمكن حساب أي حد من حدودها مهما كانت رتبته ، لنحسب ، مثلا، الحدين u_{20} و u_{100} :

$$u_{20} = -1 + \left(\frac{1}{2}\right)(20) = +9 \quad ، \quad u_{100} = -1+\left(\frac{1}{2}\right)(100) = +49$$

لاحظ سرعة إيجاد الحدود باستعمال الحد العام بينما لو نستعمل التراجع لحساب u_{100} ، مثلا، يجب أن نحسب u_1 ثم نحسب u_2 ثم نحسب u_3 ثم ....ثم نحسب u_{99} ثم نحسب u_{100} .
وفي كل مرة نطبق العلاقة $u_{n+1} = u_n + r$ فلا تستغن عن الحد العام لحساب أي حد .

(3)اتجاه تغير متتالية حسابية : لتكن (u_n) متتالية حسابية , حدها الأول u_0 وأساسها r .
إن عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) هي $u_n = u_0 + nr$ ومنه $u_{n+1} - u_n = r$.

الخلاصة : اتجاه تغير المتتالية الحسابية يتعلق بإشارة الأساس r .

فإذا كان $r > 0$ تكون المتتالية الحسابية متزايدة تماما .
وإذا كان $r < 0$ تكون المتتالية الحسابية متناقصة تماما .
وإذا كان $r = 0$ تكون المتتالية الحسابية رتيبة .

ففي المثال السابق : بما ان $r = \frac{1}{2} > 0$ فإن المتتالية الحسابية (u_n) متزايدة تماما .

(4) مجموع n حدا الأولى من متتالية حسابية:
ليكن S_n مجموع n حدا أولى من متتالية حسابية (u_n) حدها الأول u_0 وأساسها r.

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{n-1} = \frac{n}{2}(u_0 + u_{n-1})$$

المثال السابق : لنحسب مجموع 20 حدا الأولى

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{19} = \frac{20}{2}(u_0 + u_{19})$$

لنحسب u_{19} باستعمال عبارة الحد العام $u_n = -1+\frac{1}{2}n$: $u_{19} = -1+\frac{19}{2} = \frac{17}{2}$ ثم

نعوض قيمتي u_{19} و u_0 في S_n فنجد : $S_n = \frac{20}{2}\left(-1+\frac{17}{2}\right) = 75$

(5) مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية: ليكن S هذا المجموع

الحد الأخير
الحد الأول
عدد الحدود المتتابعة

$$S_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + ... + u_n = \frac{n-p+1}{2}(u_p + u_n)$$

نستعمل المثال السابق لحساب المجموعين :

$$S = u_{10} + u_{11} + ... + u_{40} = \frac{40-10+1}{2}(u_{10} + u_{40}) = \frac{31}{2}(4+19) = \frac{713}{2}$$

$$S = u_1 + u_2 + ... + u_n = \frac{n-1+1}{2}(u_1 + u_n) = \frac{n}{2}\left(-1+-1+\frac{n}{2}\right) = \frac{n(n-4)}{4}$$

المتتالية الهندسية :

(1) نسمي **متتالية هندسية أساسها q** كل متتالية عددية (u_n) معرفة على **N** كما يلي :

$$u_{n+1} = u_n \times q$$

نتيجة : تتعين متتالية هندسية إذا عُلم حدها الأول (u_0 أو u_1 على سبيل المثال)
وعُلم أساسها q .

فحدود المتتالية الهندسية المعرفة على **N** التي حدها الأول $u_0 = -2$ وأساسها $q = \frac{1}{2}$ هي:

$$u_0 = -2, u_1 = u_0 \times q = -2 \times \frac{1}{2} = -1, u_2 = u_1 \times q = -1 \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2},...$$

نتيجة : من $u_{n+1} = u_n \times q$ و $u_n = u_{n-1} \times q$ ينتج : $(u_n)^2 = u_{n-1} \times u_{n+1}$

ويسمى u_n الوسط الهندسي للعددين u_{n-1} و u_{n+1} ، وهما حدان يحصران u_n.
وبالتالي نقول عن أعداد حقيقية : a,b,c ، بهذا الترتيب ، **" أنها حدود متتابعة من متتالية هندسية"** إذا وفقط إذا تحققت العلاقة : $b^2 = a \times c$.

(2) الحد العام لمتتالية هندسية : إن حساب حد رتبته كبيرة بهذه الطريقة التراجعية السابقة يطول ويطول لهذا نستعين بعبارة الحد العام وهاهي :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

في الحالة التي يكون فيها الحد الأول للمتتالية الحسابية هو u_0 .

$$u_n = u_1 \times q^{n-1}$$

في الحالة التي يكون فيها الحد الأول للمتتالية الحسابية هو u_1 .

والعلاقة بين أي حدين دليلاهما p و n هي :

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

فعبارة الحد العام للمتتالية الهندسية (u_n) التي حدها الأول $u_0=-2$ وأساسها $q=\frac{1}{2}$ هي :

$$u_n=-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

وبالتالي يمكن حساب أي حد من حدودها مهما كانت رتبته .

لنحسب ، مثلا، الحدين u_{20} و u_{100} :

$$u_{20}=-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{20} \quad , \quad u_{100}=-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$$

لاحظ سرعة إيجاد الحدود باستعمال الحد العام بينما لو نستعمل التراجع لحساب u_{100} ، مثلا، يجب أن نحسب u_1 ثم نحسب u_2 ثم نحسب u_3 ثم ....ثم نحسب u_{99} ثم نحسب u_{100}.

وفي كل مرة نطبق العلاقة $u_{n+1}=u_n\times q$ فلا تستغن عن الحد العام لحساب أي حد .

(3)اتجاه تغير متتالية هندسية : لدينا $u_{n+1}-u_n=u_0q^n(q-1)$

نلاحظ أن إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$ تتعلق بالحد u_0 وبالأساس q.

لندرس اتجاه تغير المتتالية الهندسية (u_n) التي حدها الأول $u_0=-2$ وأساسها $q=\frac{1}{2}$

لدينا $u_{n+1}-u_n=(-2)\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}-1\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ والمتتالية (u_n) متزايدة تماما.

(4) مجموع n حدا الأولى من متتالية هندسية:

ليكن S_n مجموع n حدا أولى من متتالية هندسية (u_n) حدها الأول u_0 وأساسها q.

❶إذا كان $q\neq 1$ فإن

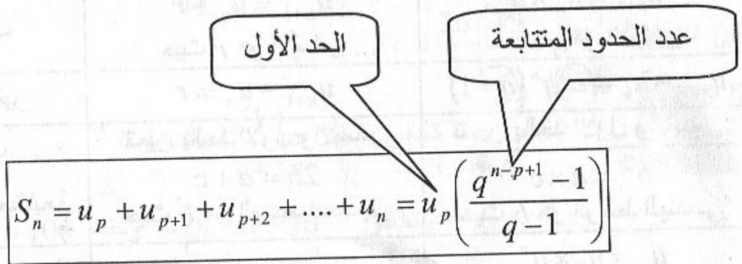
$$S_n=u_0+u_1+u_2+....+u_{n-1}=u_0\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)$$

لنحسب مجموع 20 حدا الأولى للمتتالية الهندسية (u_n) التي حدها الأول $u_0=-2$ وأساسها $q=\frac{1}{2}$.

$$S_n=u_0+u_1+u_2+....+u_{19}=(-2)\left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{20}-1}{\frac{1}{2}-1}\right)=-4\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{20}-1\right]$$

❷إذا كان $q=1$ فإن $S_n=u_0+u_1+u_2+....+u_{n-1}=nu_0$

(5) مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية: ليكن S هذا المجموع



$$S_n=u_p+u_{p+1}+u_{p+2}+....+u_n=u_p\left(\frac{q^{n-p+1}-1}{q-1}\right)$$

لتكن المتتالية الهندسية (u_n) التي حدها الأول $u_0=-2$ وأساسها $q=\frac{1}{2}$ لحساب المجموعين :

① $S=u_{10}+u_{11}+...+u_{40}=u_{10}\left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{40-10+1}-1}{\frac{1}{2}-1}\right)=u_{10}\left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{31}}{-\frac{1}{2}}\right)$

وبما أن $u_{10}=-2\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ فإن

$$S=-2\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{31}}{-\frac{1}{2}}\right)=4\left(\frac{1}{2}\right)^{41}$$

② $S_n=u_1+u_2+....+u_n=u_1\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)$

نهاية متتالية هندسية : لتكن (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 وأساسها q.

إن حدها العام هو $u_n=u_0\times q^n$ وبالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty} u_0\times q^n$

ومنه الملخص الآتي :

q	$q>+1$	$q=+1$	$-1<q<+1$	$q\leq -1$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$+\infty\ (u_0>0)$ $-\infty\ (u_0<0)$	u_0	0	غير موجودة
	متباعدة	متقاربة	متقاربة	متباعدة

جدول ملخص للمتتاليتين الحسابية والهندسية

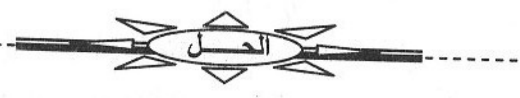
العناصر	المتتالية الحسابية	المتتالية الهندسية
التعريف	$u_{n+1}=u_n+r$ حيث r هو الأساس	$u_{n+1}=u_n\times q$ حيث q هو الأساس
اتجاه التغير	$u_{n+1}-u_n=r$	$u_{n+1}-u_n=u_0q^n(q-1)$
التعيين	تتعين بالحد الأول والأساس	تتعين بالحد الأول والأساس
ثلاثة حدود متتابعة	$2b=a+c$ حيث b هو الوسط الحسابي	$b^2=a\times c$ حيث b هو الوسط الهندسي
الحد العام	$u_n=u_0+n\times r$ أو $u_n=u_1+(n-1)r$	$u_n=u_0\times q^n$ أو $u_n=u_1\times q^{n-1}$
العلاقة بين حدين	$u_n=u_p+(n-p)r$	$u_n=u_p\times q^{n-p}$
مجموع حدود متعاقبة	$S=u_p+...+u_n$ $S=\frac{n-p+1}{2}(u_p+u_n)$	$S=u_p+...+u_n$ $S=u_p\left(\frac{q^{n-p+1}-1}{q-1}\right)$

التمرين103

لتكن (u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_0=-3$ و أساسها $r=\frac{1}{2}$.

1) احسب المجموعين $S_1=u_0+u_1+...+u_{24}$ و $S_2=u_{25}+u_{26}+...+u_{100}$

2) ابتداءً من أي رتبة n يكون لدينا $u_n>50$ ؟



الحل

1) حساب S_1

لاحظ أن عدد الحدود هو 25 والحد الأول في S_1 هو -3 والحد الأخير في S_1 هو u_{24} .

ولدينا $u_{24}=u_0+24r=-3+(24)\left(\frac{1}{2}\right)=9$, إذن $S_1=\frac{25}{2}(-3+9)=75$

حساب S_2

لاحظ أن عدد الحدود هو 76 والحد الأول في S_2 هو u_{25} والحد الأخير في S_2 هو u_{100} .

ولدينا: $u_{25}=u_0+25r=-3+(25)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{19}{2}$

و $u_{100}=u_0+100r=-3+(100)\left(\frac{1}{2}\right)=47$

إذن $S_2=\frac{76}{2}\left(\frac{19}{2}+47\right)=2147$.

2) تعيين n

إن $u_n>50$ تكافئ $-3+(n)\left(\frac{1}{2}\right)>50$

وتكافئ $\frac{1}{2}n-3>50$ ومنه $n>106$.

التمرين104

احسب المجموعين الآتيين

$S_1=5+7+9+11+...+121$ و $S_2=5+2-1-4-7...-34$

الحل

• لاحظ أن S_1 هو مجموع أعداد فردية تبدأ بالعدد 5 وتنتهي بالعدد 121.
ونعلم أن الأعداد الفردية تشكل متتالية حسابية (u_n) حدها الأول $u_0=1$ و أساسها $r=2$, أي أن حدها العام هو $u_n=2n+1$.

إذن $u_2=5$ و $u_{60}=121$ وبالتالي $S_1=u_2+u_3+...+u_{60}$

لدينا عدد الحدود هو $60-2+1=59$ (دليل الحد الأخير – دليل الحد الأول +1)

وبتطبيق قانون المجموع نجد : $S_1=\frac{59}{2}(u_2+u_{60})=\frac{59}{2}(5+121)=3717$.

طريقة ثانية :

لاحظ أن $(7)-(5)=(9)-(7)=(11)-(9)=...=2$

إذن , S_1 هو مجموع حدود متتالية حسابية حدها الأول $u_0=5$ وأساسها $r=2$

ومنه حدها العام هو $u_n=2n+5$.

إذن $u_{58}=121$ وبالتالي $S_1=u_0+u_1+...+u_{58}$

لدينا عدد الحدود هو 59, وبتطبيق قانون المجموع نجد :

$$S_1=\frac{59}{2}(u_0+u_{58})=\frac{59}{2}(5+121)=3717$$

• لاحظ أن $(2)-(5)=(-1)-(2)=(-4)-(-1)=(-7)-(-4)=...=-3$

إذن , S_2 هو مجموع حدود متتالية حسابية حدها الأول $u_0=5$ وأساسها $r=-3$.

ومنه حدها العام هو $u_n=-3n+5$.

إذن $u_{13}=-34$ وبالتالي $S_1=u_0+u_1+...+u_{13}$

لدينا عدد الحدود هو 14, وبتطبيق قانون المجموع نجد :

$$S_1=\frac{14}{2}(u_0+u_{13})=\frac{14}{2}(5-34)=-203$$

التمرين 105

(u_n) متتالية حسابية , بحيث أن : $u_{20}=12$ و $u_{25}=16$.

1) عين حدها الأول u_0 وأساسها r.

2) اكتب , بدلالة n , المجموع $S_n=u_0+u_1+...+u_n$.

3) استنتج قيمة n من أجل $S_n=248$.

الحل

1) تعيين u_0 و r إن عبارة الحد العام هي $u_n=u_0+n\times r$.

إذن $\begin{cases}u_{20}=u_0+20r\\u_{25}=u_0+25r\end{cases}$ وبالتالي $\begin{cases}u_0+20r=12....(1)\\u_0+25r=16...(2)\end{cases}$ وبطرح (1) من (2) نجد

$5r=4$ ومنه $r=\frac{4}{5}$ وبتعويض قيمة r في (1) نجد : $u_0=-4$. ومنه $u_n=\frac{4}{5}n-4$

2) حساب S_n بدلالة n

$$S_n=\frac{n+1}{2}(u_0+u_n)=\frac{n+1}{2}\left(-4+\frac{4}{5}n-4\right)=\frac{(n+1)(2n-20)}{5}$$

3) استنتاج قيمة n إن $S_n=248$ تكافئ $\frac{(n+1)(2n-20)}{5}=248$

تكافئ $n^2-9n-630=0$

ومميز هذه المعادلة هو 2601 ومنه للمعادلة حلان مختلفان هما $n_1=-21$, $n_2=30$

إذن $n=30$, لأن n عدد طبيعي .

التمرين 106

(u_n) متتالية معرفة كما يلي : $u_0=1$ و $u_{n+1}=\frac{u_n}{1+u_n}$.

1) احسب u_1 , u_2 , u_3.

2) لتكن (v_n) المتتالية المعرفة كما يلي : $v_n=\frac{1}{u_n}$.

برهن أن (v_n) متتالية حسابية , يطلب تعيين أساسها.

3) استنتج عبارة v_n ثم عبارة u_n.

الحل

1) حساب u_1 , u_2 , u_3. من العلاقة $u_{n+1}=\frac{u_n}{1+u_n}$ نجد :

$$u_1=\frac{u_0}{1+u_0}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2},\ u_2=\frac{u_1}{1+u_1}=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3},\ u_3=\frac{u_2}{1+u_2}=\frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\frac{1}{4}$$

2) (v_n) متتالية حسابية

لدينا , من أجل كل عدد طبيعي n , $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{u_{n+1}}-\frac{1}{u_n}=\frac{1+u_n}{u_n}-\frac{1}{u_n}=1$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها 1 وحدها الأول $v_0=\frac{1}{u_0}=1$.

3) عبارتا v_n و u_n.

من أجل كل عدد طبيعي n , $v_n=n+1$.

وبما أن $v_n=\frac{1}{u_n}$ فإن $u_n=\frac{1}{v_n}$ ومنه $u_n=\frac{1}{n+1}$.

التمرين 107

يعاني مصنع من نقص سنوي في إنتاجه قدره 40% . بلغ إنتاج هذا المصنع 25000 وحدة سنة 2000 .

1) ما هو الإنتاج المتوقع في السنتين 2001 و2002 . (عدد الوحدات)

2) لنرمز بالرمز p_0 إلى إنتاج المصنع سنة 2000 أي أن $p_0 = 25000$

وبالرمز p_n إلى إنتاجه سنة $(2000+n)$. عبر عن p_n بدلالة n .

الحل

1) إنتاج السنتين 2001 و 2002

لدينا الـ 40% من إنتاج سنة2000 هو (وحدة) $\frac{40}{100}\times 25000 = 10000$

ومنه إنتاج المصنع سنة 2001 هو 25000−10000=15000 .

لدينا الـ 40% من إنتاج سنة2000 هو (وحدة) $\frac{40}{100}\times 15000 = 6000$

ومنه إنتاج المصنع سنة 2002 هو 15000−6000=9000 .

2) p_n بدلالة n

لدينا $p_{n+1} = p_n - \frac{40}{100}p_n$ ومنه $p_{n+1}=\frac{3}{5}p_n$ وبالتالي (p_n) متتالية هندسية

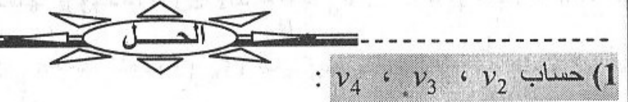
أساسها $q=\frac{3}{5}$ وحدها الأول $p_0 = 25000$. ومنه $p_n = 25000\left(\frac{3}{5}\right)^n$



(v_n) متتالية معرفة كما يلي : $v_1=1$ و $5v_{n+1}=v_n+8$

1) احسب v_2 ، v_3 ، v_4

2) نضع $u_n = v_n - 2$. برهن أن (u_n) متتالية هندسية.



1) حساب v_2 ، v_3 ، v_4 :

من العلاقة $5v_{n+1}=v_n+8$ نجد $v_{n+1}=\frac{v_n+8}{5}$ وبالتالي :

$$v_2=\frac{v_1+8}{5}=\frac{9}{5} \text{ ، } v_3=\frac{v_2+8}{5}=\frac{\frac{9}{5}+8}{5}=\frac{49}{25} \text{ , } v_4=\frac{v_3+8}{5}=\frac{\frac{49}{25}+8}{5}=\frac{249}{125}$$

2) (u_n) متتالية هندسية :

حتى تكون (u_n) متتالية هندسية يكفي أن نجد عددا حقيقيا q بحيث يكون : $u_{n+1}=u_n\times q$

من العلاقة $u_n=v_n-2$ نجد $u_{n+1}=v_{n+1}-2$

وبما أن $v_{n+1}=\frac{v_n+8}{5}$ فإن $u_{n+1}=\frac{v_n+8}{5}-2=\frac{v_n-2}{5}=\frac{1}{5}(v_n-2)=\frac{1}{5}u_n$

وبالتالي (u_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{5}$.

التمرين109

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة كما يلي :

$u_1=-3$ و $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n-6$ من أجل $n\geq 1$

1) احسب u_2 ، u_3 ، u_4 .

2) لتكن (v_n) المتتالية المعرفة كما يلي: $v_n=u_n+18$, من أجل $n\geq 1$

برهن أن (v_n) متتالية هندسية . اكتب v_n بدلالة n ثم اكتب u_n بدلالة n .

3) احسب v_{11} باستعمال الآلة الحاسبة.

4) احسب نهاية المتتالية (v_n) ثم استنتج نهاية المتتالية (u_n).

الحل

1) حساب u_2 ، u_3 ، u_4 :

من $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n-6$ نجد $u_2=\frac{2}{3}u_1-6=\frac{2}{3}(-3)-6=-8$

$$u_3=\frac{2}{3}u_2-6=\frac{2}{3}(-8)-6=-\frac{34}{3}$$

$$u_4=\frac{2}{3}u_3-6=\frac{2}{3}\left(-\frac{34}{3}\right)-6=-\frac{68}{9}-6=-\frac{122}{9}$$

2) (v_n) متتالية هندسية :

حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يكفي أن نجد عددا حقيقيا q بحيث يكون : $v_{n+1}=v_n\times q$

بما أن $v_n=u_n+18$ فإن $v_{n+1}=u_{n+1}+18$

وبما أن $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n-6$ فإن $v_{n+1}=\frac{2}{3}u_n-6+18=\frac{2}{3}u_n+12$ ... (1)

وبما أن $v_n=u_n+18$ فإن $u_n=v_n-18$ وبتعويض u_n في (1) نجد

$v_{n+1}=\frac{2}{3}(v_n-18)+12=\frac{2}{3}v_n$ وبالتالي (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$.

كتابة v_n بدلالة n : بما أن الحد الأول هو v_1 فإن $v_n = v_1 \times q^{n-1}$

وبما أن $v_1 = u_1 + 18 = +15$ و $q = \frac{2}{3}$ فإن $v_n = (15)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

كتابة u_n بدلالة n :

بما أن $v_n = u_n + 18$ فإن $u_n = v_n - 18$ وبالتالي $u_n = (15)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 18$

حساب v_{11} : $v_{11} = (15)\left(\frac{2}{3}\right)^{10} - 18 = -17.73...$ وهذا باستعمال اللمسة y^x

4) حساب نهايتي المتتاليتين (v_n) و (u_n).

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} (15)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 0$$ لأن $-1 < q < +1$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} (v_n - 18) = -18$$ لأن $u_n = v_n - 18$



التمرين110

لتكن (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N} - \{0\}$ كما يلي :

$u_1 = 6$ و $5u_n = u_{n-1} + 4$ من أجل $n \geq 2$

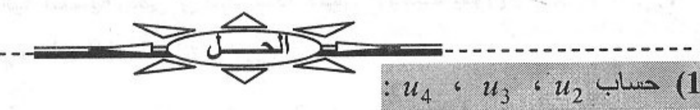
1) احسب u_2 ، u_3 ، u_4 .

2) لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N} - \{0\}$ بـ $v_n = u_n - 1$.

برهن أن (v_n) متتالية هندسية عين حدها الأول والأساس .

اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

3) احسب نهاية المتتالية (v_n) ثم استنتج نهاية المتتالية (u_n) .



الحل

1) **حساب u_2 ، u_3 ، u_4 :**

بما أن $5u_n = u_{n-1} + 4$ فإن $u_n = \frac{u_{n-1}+4}{5}$ وبالتالي $u_2 = \frac{u_1+4}{5} = \frac{6+4}{5} = 2$

$u_3 = \frac{u_2+4}{5} = \frac{2+4}{5} = \frac{6}{5}$ ، $u_4 = \frac{u_3+4}{5} = \frac{\frac{6}{5}+4}{5} = \frac{26}{25}$.

2) **(v_n) متتالية هندسية :**

حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يكفي أن نجد عددا حقيقيا q بحيث يكون: $v_n = v_{n-1} \times q$

بما أن $v_n = u_n - 1$ و $u_n = \frac{u_{n-1}+4}{5}$ فإن $v_n = \frac{u_{n-1}+4}{5} - 1 = \frac{u_{n-1}-1}{5}$ ...(1)

وبما أن $v_n = u_n - 1$ فإن $u_{n-1} = v_{n-1} + 1$ وبتعويض u_{n-1} في (1) نجد

$v_n = \frac{v_{n-1}+1-1}{5} = \frac{1}{5} v_{n-1}$ وبالتالي (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{5}$

كتابة v_n بدلالة n : بما أن الحد الأول هو v_1 فإن $v_n = v_1 \times q^{n-1}$

وبما أن $v_1 = u_1 - 1 = 6 - 1 = 5$ و $q = \frac{1}{5}$ فإن $v_n = (5)\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$

كتابة u_n بدلالة n :

بما أن $v_n = u_n - 1$ فإن $u_n = v_n + 1$ وبالتالي $u_n = (5)\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + 1$

4) حساب نهايتي المتتاليتين (v_n) و (u_n).

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} (5)\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = 0$$ لأن $-1 < q < +1$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} (v_n + 1) = 1$$ لأن $u_n = v_n + 1$

التمرين111

لتكن (u_n) متتالية معرفة كما يلي : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 1$

1) لتكن (v_n) المتتالية المعرفة كما يلي $v_n = u_n + \frac{3}{2}$.

برهن أن (v_n) متتالية هندسية عين أساسها وحدها الأول .

2) استنتج v_n ثم u_n بدلالة n .

3) احسب نهاية المتتالية (v_n) ثم استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

4) جد ، بدلالة n ، المجموعين $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ و $T_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

الحل

1) **(v_n) متتالية هندسية :**

حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يكفي أن نجد عددا حقيقيا q بحيث يكون :

$v_n = v_{n-1}\times q$ من أجل كل عدد حقيقي n غير معدوم .

من العلاقتين $v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{3}{2}$ و $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 1$ نجد $v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 1 + \frac{3}{2}$

ومنه $v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{2}$ وبالتالي $v_{n+1} = \frac{1}{3}\left(u_n + \frac{3}{2}\right)$

وبما أن $v_n = u_n + \frac{3}{2}$ ، فإن $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$.

الخلاصة : (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ وحدها الأول $v_0 = u_0 + \frac{3}{2} = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$

2) استنتاج v_n ثم u_n بدلالة n . من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $v_n = \frac{7}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

وبما أن $v_n = u_n + \frac{3}{2}$ فإن $u_n = v_n - \frac{3}{2}$ وبالتالي $u_n = \frac{7}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{3}{2}$

3) حساب نهايتي المتتاليتين (v_n) و (u_n).

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{7}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ لأن $-1 < q < +1$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(v_n - \frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2}$ لأن $u_n = v_n - \frac{3}{2}$

4) حساب المجموعين S_n و T_n

لدينا $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0\left(\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right)$ وبتعويض قيمتي v_0 و q نجد :

$$S_n = \frac{7}{2}\left(\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{3} - 1}\right) .$$

ولدينا

$$T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \left(v_0 - \frac{3}{2}\right) + \left(v_1 - \frac{3}{2}\right) + \dots + \left(v_n - \frac{3}{2}\right)$$

$$= \left(v_0 + v_1 + \dots + v_n\right) - \frac{3}{2} - \frac{3}{2} - \dots - \frac{3}{2} = S_n + (n+1)\left(-\frac{3}{2}\right)$$

التمرين 112

لتكن (u_n) متتالية معرفة كما يلي : $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = 1 + \frac{2}{3}u_n$

1) لتكن (v_n) المتتالية المعرفة كما يلي :

$v_n = u_n - \alpha$ ، حيث α عدد حقيقي يحقق $\alpha = 1 + \frac{2}{3}\alpha$

عين α ثم برهن أن (v_n) متتالية هندسية عين أساسها وحدها الأول .

2) استنتج v_n ثم u_n بدلالة n .

3) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

الحل

1) تعيين α لدينا $\alpha = 1 + \frac{2}{3}\alpha$ تكافئ $\alpha - \frac{2}{3}\alpha = 1$ أي $\frac{1}{3}\alpha = 1$ ومنه $\alpha = 3$

1) (v_n) متتالية هندسية لدينا $v_n = u_n - 3$

من العلاقتين $v_{n+1} = u_{n+1} - 3$ و $u_{n+1} = 1 + \frac{2}{3}u_n$ نجد $v_{n+1} = 1 + \frac{2}{3}u_n - 3$

ومنه $v_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 2$ وبالتالي $v_{n+1} = \frac{2}{3}(u_n - 3)$

وبما أن $v_n = u_n - 3$ ، فإن $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$.

الخلاصة : (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ وحدها الأول $v_0 = u_0 - 3 = -3$

2) استنتاج v_n ثم u_n بدلالة n . من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $v_n = -3\left(\frac{2}{3}\right)^n$

وبما أن $v_n = u_n - 3$ فإن $u_n = v_n + 3$ وبالتالي $u_n = -3\left(\frac{2}{3}\right)^n + 3$

3) اتجاه تغير المتتالية (u_n).

ليكن الفرق $u_{n+1} - u_n = -3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + 3\left(\frac{2}{3}\right)^n = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n\left[-\frac{2}{3} + 1\right] = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n > 0$ ومنه المتتالية (u_n) متزايدة تماما

التمرين 113

لتكن (u_n) متتالية معرفة كما يلي : $u_0 = 1$ و $u_1 = 2$ و $u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$

1) لتكن (v_n) المتتالية المعرفة كما يلي : $v_n = u_{n+1} - u_n$

برهن أن (v_n) متتالية هندسية عين أساسها وحدها الأول.

2) استنتج v_n بدلالة n .

3) برهن أنه من أجل كل n ، $u_n = u_0 + (v_0 + v_1 + ... + v_{n-1})$.

4) استنتج u_n بدلالة n .

الحل

1) (v_n) متتالية هندسية لدينا $v_n = u_{n+1} - u_n$

من العلاقتين $v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1}$ و $u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$ نجد :

$v_{n+1} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n - u_{n+1}$ ، ومنه $v_{n+1} = \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$ وبالتالي

$v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_{n+1} - u_n)$. وبما أن $v_n = u_{n+1} - u_n$ ، فإن $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$.

الخلاصة : (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0 = u_1 - u_0 = 2 - 1 = 1$

2) استنتاج v_n بدلالة n . من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $v_n = (1)\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

3) المساواة $u_n = u_0 + (v_0 + v_1 + ... + v_{n-1})$

لنحسب المجموع $v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$ بالطريقة الآتية :

$v_0 = u_1 - u_0$

$v_1 = u_2 - u_1$

$v_2 = u_3 - u_2$

....

$v_{n-1} = u_n - u_{n-1}$

بجمع المساويات ، طرفا إلى طرف ، تختفي حدود ويبقى معنا الآتي :

$v_0 + v_1 + ... + v_{n-1} = u_n - u_0$ ومنه $u_0 + (v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}) = u_0 + (u_n - u_0)$

الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = u_0 + (v_0 + v_1 + ... + v_{n-1})$.

4) استنتاج u_n بدلالة n .

لدينا $v_0 + v_1 + ... + v_{n-1} = v_0\left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

ومنه $u_n = u_0 + 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

التمرين 114

لتكن (u_n) متتالية هندسية معرفة بحدها الأول $u_1 = -48$ وحدها الثامن $u_8 = \frac{3}{8}$.

1) عين الأساس والحد العام لهذه المتتالية.

2) برهن أن المتتالية (u_n) تقبل نهاية محدودة عندما ينتهي n إلى $+\infty$.

الحل

1) تعيين الأساس والحد العام: بما أن الحد الأول هو u_1 فإن $u_n = u_1 \times q^{n-1}$

من أجل $n = 8$ نجد $u_8 = u_1 \times q^7$ وبالتالي : $\frac{3}{8} = -48 \times q^7$

ومنه $q^7 = -\frac{3}{384} = -\frac{1}{128} = \left(-\frac{1}{2}\right)^7$ وبالتالي $q = -\frac{1}{2}$.

وعبارة الحد العام هي : $u_n = -48 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

نهاية u_n عندما تنتهي n إلى $+\infty$ بما أن $-1 < q < +1$ فإن $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$

التمرين 115

إن استهلاك دولة للسكر, حاليا, يقدر بـ3.5 مليون طن ويتزايد بانتظام بـ 10% سنويا.

ليكن $f(0)$ الاستهلاك الحالي للسكر.

وليكن $f(n)$ الاستهلاك لمدة n سنة $(n \in \mathbb{N} - \{0\})$.

1) احسب $f(1)$ ، $f(2)$ ، $f(3)$. جد علاقة بين $f(n)$ و $f(n+1)$.

اكتب $f(n)$ بدلالة $f(0)$ و n .

2) كم يلزم من سنة ليتضاعف الاستهلاك الحالي للسكر في هذه الدولة.



1) حساب $f(1)$ و $f(2)$ و $f(3)$

بما أن $f(0)=3.5$ فإن $f(1)=f(0)+(\,10\ \%$ من $f(0)\,)$ وبالتالي

$$f(1)=f(0)+\frac{10}{100}f(0)=f(0)+0.1f(0)=1.1\times f(0)$$

$$=1.1\times 3.5=3.85 \text{ (مليون طن)}$$

$$f(2)=f(1)+\frac{10}{100}f(1)=f(1)+0.1f(1)=1.1\times f(1)$$

$$=1.1\times 3.85=4.235 \text{ (مليون طن)}$$

$$f(3)=f(2)+\frac{10}{100}f(2)=f(2)+0.1f(2)=1.1\times f(2)$$

$$=1.1\times 4.235=4.6585 \text{ (مليون طن)}$$

العلاقة بين $f(n)$ و $f(n+1)$

$$f(n+1)=f(n)+\frac{10}{100}f(n)=f(n)+0.1f(n)=1.1\times f(n)$$

كتابة $f(n)$ بدلالة $f(0)$ و n إذا وضعنا $u_n=f(n)$ نجد $u_{n+1}=1.1\times u_n$

ومنه (u_n) متتالية هندسية أساسها 1.1 و حدها الأول $u_0=f(0)$.

وبالتالي عبارة الحد العام هي $u_n=u_0(1.1)^n$ ومنه $f(n)=f(0)\times(1.1)^n$.

2) عدد السنوات اللازمة ليتضاعف الاستهلاك أي يصبح $2f(0)$.

نضع $f(n)=2f(0)$ ومنه $2f(0)=f(0)\times(1.1)^n$

وبقسمة الطرفين على $f(0)$ نجد $(1.1)^n=2$ باستعمال الآلة الحاسبة نجد $7<n<8$

أي بعد 7 سنوات .

التمرين 116

في أول جانفي 2000 أحصت مدينة A 200 000 ساكنا , وفي نفس التاريخ أحصت مدينة أخرى B 150 000 ساكنا.

نعتبر أن سكان المدينة A يتناقصون بنسبة سنوية قدرها 3% والعكس بالنسبة إلى سكان المدينة B فهم يتزايدون بنسبة سنوية قدرها 5% .

1) ما هو عدد سكان المدينتين A و B في أول جانفي 2001 وفي أول جانفي 2002 ؟

2) من أجل كل عدد طبيعي n ,

نرمز بالرمز a_n لعدد سكان المدينة A في أول جانفي من السنة $(2000+n)$.

ونرمز بالرمز b_n لعدد سكان المدينة B في نفس التاريخ .

أ – بين أن (a_n) و (b_n) متتاليتان هندسيتان . عين أساسيهما .

ب– جد a_n و b_n بدلالة n .

جـ– في أول جانفي من أي سنة يفوق عددُ سكان المدينة B عددَ سكان المدينة A لأول مرة؟

الحل

1) – عدد سكان المدينة A في أول جانفي 2001 هو

$$200000-\frac{3}{100}\times 200000=194000 \text{ (ساكنا)}$$

1) – عدد سكان المدينة B في أول جانفي 2001 هو

$$150000+\frac{5}{100}\times 150000=157500 \text{ (ساكنا)}$$

2) أ– المتتالية (a_n) متتالية هندسية

ليكن عدد السكان في أول جانفي في السنة $(2000+n)$ هو a_n

وليكن عدد السكان في أول جانفي في السنة الموالية $(2000+(n+1))$ هو a_{n+1} .

لدينا , حسب المعطيات , $a_{n+1}=a_n-\frac{3}{100}a_n$ ومنه $a_{n+1}=0.97a_n$

الخلاصة : (a_n) متتالية هندسية أساسها 0.97 .

2) أ– المتتالية (b_n) متتالية هندسية

ليكن عدد السكان في أول جانفي في السنة $(2000+n)$ هو b_n .

وليكن عدد السكان في أول جانفي في السنة الموالية $(2000+(n+1))$ هو b_{n+1} .

لدينا , حسب المعطيات , $b_{n+1}=b_n+\frac{5}{100}b_n$ ومنه $b_{n+1}=1.05b_n$

الخلاصة : (b_n) متتالية هندسية أساسها 1.05 .

2) ب– a_n و b_n بدلالة n

بما أن (a_n) متتالية هندسية حدها الأول $a_0=200000$ وأساسها $q=0.97$ فإن

$a_n=200000\times(0.97)^n$.

وبما أن (b_n) متتالية هندسية حدها الأول $b_0=150000$ وأساسها $q=1.05$ فإن

. $b_n = 150000\times(1.05)^n$

2) جـ – السنة التي يفوق فيها عدد سكان المدينة B عدد سكان المدينة A

لنبحث عن العدد الطبيعي n بحيث $b_n > a_n$

لكن $b_n > a_n$ يكافئ $150000\times(1.05)^n > 200000\times(0.97)^n$

ومنه $3\times(1.05)^n > 4\times(0.97)^n$ وبالتالي $\left(\frac{1.05}{0.97}\right)^n > \frac{4}{3}$

وباستعمال الآلة الحاسبة نجد $n = 4$.

الخلاصة : في أول جانفي 2004 يفوق عدد سكان المدينة B عدد سكان المدينة A .



الجزء أ

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]1,+\infty[$ كما يلي :

$$f(x)=\frac{x}{\ln x}$$

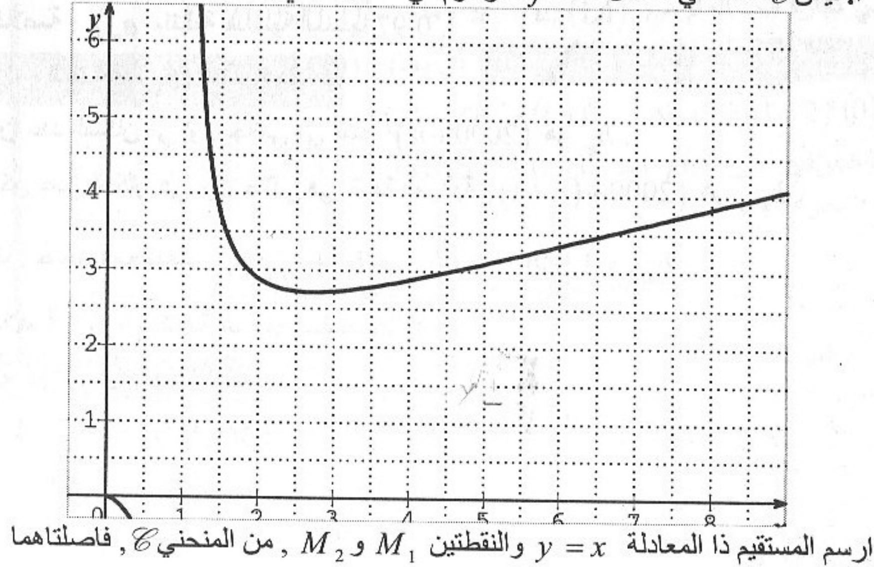
1. أ. عين نهايتي f عند 1 وعند $+\infty$.

ب. ادرس تغيرات الدالة f.

2. لتكن (u_n) المتتالية المعرفة كما يلي :

$u_0=5$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ من أجل كل عدد طبيعي n .

أ. ليكن $\mathscr{C}$ المنحني الممثل للدالة f المرسوم في الشكل الآتي :



ارسم المستقيم ذا المعادلة $y = x$ والنقطتين M_1 و M_2 , من المنحني $\mathscr{C}$, فاصلتاهما

على الترتيب u_1 و u_2 . اقترح رابطا على سلوك المتتالية (u_n).

ب. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n, $u_n \geq e$ (يمكن استعمال **1. ب**).

جـ. برهن أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو l من المجال $[e,+\infty[$.

الجزء ب

نعلم أن الدالة f مستمرة على المجال $]1,+\infty[$.

1. برهن أن $f(l)=l$.

2. استنتج قيمة l.



الجزء: أ

1. أ. تعيين نهايتي f عند 1 وعند $+\infty$.

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x}{\ln x}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{\ln x}{x}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$$

1. ب. دراسة تغيرات الدالة f.

من أجل كل x من $]1,+\infty[$,
$$f'(x)=\frac{(1)(\ln x)-\left(\frac{1}{x}\right)(x)}{(\ln x)^2}=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$$

إذن إشارة $f'(x)$ من إشارة $\ln x-1$ ومنه :

- $f'(x)=0$ تكافئ $\ln x-1=0$
  أي أن $\ln x=1$ ومنه $\ln x=\ln e$ وبالتالي $x=e$.
- $f'(x)<0$ تكافئ $\ln x-1<0$
  أي أن $\ln x<1$ ومنه $\ln x<\ln e$ وبالتالي $x<e$.
- $f'(x)>0$ تكافئ $\ln x-1>0$
  أي أن $\ln x>1$ ومنه $\ln x>\ln e$ وبالتالي $x>e$.

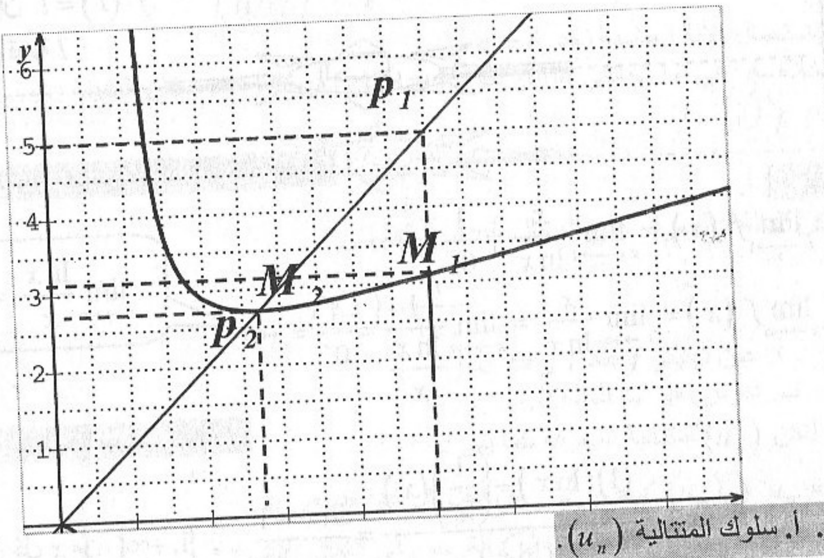
جدول التغيرات :

x	1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$

2. أ. رسم المستقيم (D) ذي المعادلة $y = x$ والنقطتين M_1 و M_2

فاصلة M_1 هي $u_1 = f(u_0) = f(5) = \frac{5}{\ln 5} = 3.1$ وترتيبها $u_2 = f(u_1) = 2.73$.

فاصلة M_2 هي $u_2 = f(u_1) = 2.73$ وترتيبها $u_3 = f(u_2) = 2.71$.



2. أ. سلوك المتتالية (u_n).

نلاحظ أن $\mathscr{C}$ و (D) يتقاطعان في النقطة $H(e,e)$. ولدينا :

فاصلة النقطة M_1 من $\mathscr{C}$ هي u_1 وترتيبها u_2.

فاصلة النقطة P_1 من (D) هي u_2 وترتيبها u_2.

فاصلة النقطة M_2 من $\mathscr{C}$ هي u_2 وترتيبها u_3.

فاصلة النقطة P_2 من (D) هي u_3 وترتيبها u_3.

فاصلة النقطة M_3 من $\mathscr{C}$ هي u_3 وترتيبها u_4.

....

إن استعمال هذين المنحنيين يسمح بتشكيل متتالية نقاط من $\mathscr{C}$ أو من (D) فواصلها ، على الترتيب ، $u_1 , u_2 , u_3 , ..., u_n , ...$

الخلاصة : يقودنا المنحني إلى **التخمين** بأن المتتالية (u_n) متناقصة ومتقاربة ونهايتها e .

ملاحظة : إنه مجرد تخمين يمكن استغلاله لإنجاز مخطط عمل نستعمله لدراسة المتتالية.

2. ب. من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \ge e$

باستعمال السؤال **1. ب** ، نجد من أجل كل x من $]1,+\infty[$ ، $f(x) \ge e$

إذن من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \ge e$.

ملاحظة : يمكن استعمال البرهان بالتراجع.

2. جـ. المتتالية (u_n) متقاربة نحو l من المجال $[e,+\infty[$.

بما أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \ge e$ فإن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد e

ولدينا $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{\ln u_n} - u_n = \frac{u_n(1-\ln u_n)}{\ln u_n}$

وبما أن من أجل كل عدد طبيعي n من $[e,+\infty[$ ، $1-\ln u_n \le 0$ فإن $u_{n+1} - u_n \le 0$

وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة.

الخلاصة : المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة نحو l من $[e,+\infty[$.

الجزء: ب

1. لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ وبما أن الدالة f مستمرة عند l فإن l هي حل للمعادلة $l = \frac{l}{\ln l}$.

2. لتكن $l(\ln l - 1) = 0$. إذن للمعادلة حلان هما : $e , 0$.

وبما أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \ge e$ فإن $l = e$.

كان ليوناردو دو بيز Leonard de Pise الملقب بـ Fibonacci من أكبر علماء الرياضيات وقد ولد عام 1170 م بمدينة Pise بايطاليا . سافر كثيرا بهدف تعلم طرق الحساب المستعملة في الشرق والعلاقات الرياضياتية المستعملة في بناء الأهرامات وإثر عودته إلى إيطاليا اصدر عدة كتب ، ويرجع له الفضل في تعريف الغرب بالأرقام العربية بما فيها العدد 0 كما أنه استعمل كلمة sinus.

قام بدراسة المتتالية التي تعرف باسمه والتي حدودها هي :

1 ، 1 ، 2 ، 3 ، 5 ، 8 ، 13 ، 21 ، 34 ، 55 ، 89 ، 144 ، ...

نلاحظ أنه انطلاقا من الحد الثالث يتم الحصول على أي حد بجمع الحدين السابقين ، كما نلاحظ أن النسبة بين أي حدين متتابعين تؤول إلى العدد الذهبي بقيم أصغر وبقيم أكبر فمثلا :

$\frac{55}{34} = 1.6167...$ ، $\frac{89}{55} = 1.6181...$ ، $\frac{144}{89} = 1.6179...$ ، ...

قوم نفسك في المتتاليات

التمرين 1 — 4 نقاط

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 20 \\ u_1 = 6 \\ u_{n+1} = -\frac{1}{20}u_n + \frac{1}{20}u_{n-1} \quad ; n \geq 1 \end{cases}$$

1. احسب u_2 و u_3 .
2. نعتبر المتتاليتين العدديتين (v_n) و (w_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$w_n = u_{n+1} - \frac{1}{5}u_n \quad \text{و} \quad v_n = u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n$$

a) احسب : v_0 ، v_1 ، w_0 ، w_1 .

b) بين أن كلا من المتتاليتين (v_n) و (w_n) هندسية . عين أساسيهما.

c) احسب كلا من v_n ، w_n بدلالة n . استنتج u_n بدلالة n .

d) احسب نهاية u_n .

التمرين 2 — 3 نقاط

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$u_0 = 1$ و من كل عدد طبيعي n ، $3u_{n+1} = 2u_n + n + 3$.

لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = u_n - n$.

1. a) بين أن (v_n) هندسية ، عين أساسها وحدها الأول.

b) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n + n$ ثم احسب نهاية u_n .

2. a) احسب المجموعين :

$$S = 1+2+3+4+...+98+99$$

$$S' = 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + ... + \left(\frac{2}{3}\right)^{98} + \left(\frac{2}{3}\right)^{99}$$

b) استنتج أن : $u_0+u_1+...+u_{98}+u_{99}=4953-3\left(\frac{2}{3}\right)^{100}$

التمرين 3 — 5 نقاط

لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} u_0=\frac{3}{2} \\ u_{n+1}=\frac{u_n^{\ 2}+u_n}{u_n^{\ 2}+1}, n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

1. بين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_n>1$.
2. ادرس رتابة المتتالية (u_n) .
3. استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .
4. أ) بين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_{n+1}-1\le\frac{1}{2}(u_n-1)$.

ب) استنتج أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_n-1\le\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

التمرين 4 — 5 نقاط

لتكن الدالة f المعرفة على $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ كما يلي : $f(x)=\sqrt{x^2-x^3}$.

ولتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0=\frac{1}{4} \\ u_{n+1}=f(u_n), n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

1. أ) بين أن الدالة $g: x\to x^2-x^3$ متزايدة على المجال $\left[0,\frac{1}{2}\right]$.

ب) استنتج أن f متزايدة على نفس المجال.

جـ) بين أن $f\left(\left[0,\frac{1}{2}\right]\right)\subset\left[0,\frac{1}{2}\right]$.

2. أ) بين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $0\le u_n\le\frac{1}{2}$.

ب) ادرس رتابة المتتالية (u_n) .

جـ) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة واحسب نهايتها.

التمرين 5 — 5 نقاط

الجزء: أ

تعطى نقطتان مختلفتان A_0 و B_0 من مستقيم ، لتكن النقط : A_1 منتصف القطعة $[A_0B_0]$ و B_1 مرجح الجملة $\{(A_0,1),(B_0,2)\}$.

ثم من أجل كل عدد طبيعي n ،

A_{n+1} منتصف القطعة $[A_nB_n]$ و B_{n+1} مرجح الجملة $\{(A_n,1),(B_n,2)\}$.

1. علّمْ النقط A_1 ، B_1 ، A_2 ، B_2 من أجل $A_0B_0=12cm$.

ما هي العلاقة التي تربط A_n بـ B_n عندما يكون n كبيرا جدا ؟

2. نزود المستقيم (A_0B_0) بالمعلم $(A_0,\vec{i})$ حيث $\vec{i}=\frac{1}{12}\overrightarrow{A_0B_0}$.

لتكن u_n و v_n ، على الترتيب ، فاصلتي النقطتين A_n و B_n .

تحقق من أنه من أجل كل عدد طبيعي n موجب تماما ، لدينا

$$u_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2} \text{ و } v_{n+1}=\frac{u_n+2v_n}{3}$$

الجزء: ب

لتكن المتتاليتان (u_n) و (v_n) المعرفتان كما يلي: $u_0=0$ ، $v_0=12$ ،

$u_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}$ و $v_{n+1}=\frac{u_n+2v_n}{3}$.

1. لتكن المتتالية (W_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $w_n=v_n-u_n$.

بين أن (W_n) هندسية متقاربة وجميع حدودها موجبة .

2. بين أن المتتالية (u_n) متزايدة والمتتالية (v_n) متناقصة .
3. استنتج من السؤالين السابقين أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متقاربتان وأن لهما نفس النهاية .
4. نعتبر المتتالية (t_n) المعرفة كما يلي : $t_n=2u_n+3v_n$.

بين أنها ثابتة.

التمرين 6 — 5 نقاط

سعيد ورضا يلعبان التنس (tennis).
هذان اللاعبان لهما نفس الحظ بالفوز بالمقابلة الأولى.
أما بقية المقابلات فوضعها كما يلي : إذا فاز سعيد بمقابلة يكون احتمال فوزه في المقابلة الموالية هو 0.7 ، وإذا خسر مقابلة يكون احتمال خسارته في المقابلة الموالية هو 0.8 .
في كل التمرين، n عدد طبيعي غير معدوم . نعتبر الحوادث الآتية :

- G_n : " يفوز سعيد بالمقابلة النونية "
- P_n : " يخسر سعيد المقابلة النونية "

نضع : $p_n = p(G_n)$ و $q_n = p(P_n)$.

1. البحث عن علاقة تراجعية.
   a) عين p_1 ثم الاحتمالين الشرطيين $p_{G_1}(G_2)$ ، $p_{P_1}(G_2)$.
   b) علل المساواة $p_n + q_n = 1$.
   c) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $p_{n+1} = 0.5p_n + 0.2$.
2. دراسة المتتالية (p_n) .
   نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $v_n = p_n - \dfrac{2}{5}$.
   a) بين أن المتتالية (v_n) هندسية ، عبر عن v_n بدلالة n .
   b) استنتج عبارة p_n بدلالة n .
   c) عين نهاية المتتالية (p_n) عندما تنتهي n إلى $+\infty$.

التمرين 7 — 5 نقاط

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 1}{4} \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \dfrac{3v_n + 1}{4} \end{cases}$$

1. احسب u_1 ، u_2 ، u_3 ، v_1 ، v_2 ، v_3 .
2. في معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الرسم : 5cm) ارسم المستقيمين D و Δ اللذين معادلتاهما ، على الترتيب ، $y = \dfrac{3x+1}{4}$ و $y = x$.

استعمل D و Δ لإنشاء ، على محور الفواصل ، النقط A_1 ، A_2 ، A_3 التي فواصلها على الترتيب u_1 ، u_2 ، u_3 وكذلك النقط B_1 ، B_2 ، B_3 التي فواصلها على الترتيب v_1 ، v_2 ، v_3 .

3. نعتبر المتتالية (s_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $s_n = u_n + v_n$
   a) احسب s_0 ، s_1 ، s_2 ، s_3 . ماذا تستنتج ؟
   b) باستعمال البرهان بالتراجع ، بين أن المتتالية (u_n) ثابتة .
4. نعتبر المتتالية (d_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $d_n = v_n - u_n$
   a) بين أن المتتالية (d_n) هندسية .
   b) أعط عبارة d_n بدلالة n .
5. استنتج عبارتي u_n و v_n بدلالة n .
6. بين أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متقاربتان . عين نهايتيهما.

التمرين 8 — 4 نقاط

نعتبر الدالة f المعرفة على $]1, +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$

1. بين أن : $f([3, +\infty[) = [3, +\infty[$
2. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = u_n - 2 + \dfrac{4}{u_n - 1}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$
   a) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \geq 3$.
   b) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة .
   c) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ، عين نهايتها .
3. لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = u_n - 3$
   a) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} \leq \dfrac{1}{2} v_n^2$.
   b) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2^n - 1}$
   c) استنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$ ثم $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

التمرين 9 — 5 نقاط

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{8 + \frac{u_n^2}{3}}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. بين ، باستعمال البرهان بالتراجع ، أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \le u_n \le 2\sqrt{3}$.
2. بين أن (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة .
3. لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = 12 - u_n^2$

a) بين أن المتتالية (v_n) هندسية ، عين أساسها وحدها الأول.

b) احسب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

c) احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

d) احسب ، بدلالة n ، المجموع : $S_n = u_0^2 + u_1^2 + ... + u_{n-1}^2$

التمرين 10 — 5 نقاط

نعتبر المتتالية (a_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $a_n = \frac{n}{3^n}$.

1. برهن باستعمال الاستدلال بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3^n > n^2$.
2. استنتج أن $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$.
3. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{n+1}{3n} u_n, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

a) احسب u_2 ، u_3 ، u_4 .

b) بين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ ، $u_n > 0$.

4. لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $v_n = \frac{u_n}{n}$.

a) احسب v_1 ، v_2 ، v_3 .

b) بين أن (v_n) متتالية هندسية ، عين أساسها.

c) عين v_n بدلالة n و استنتج u_n بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

الأعداد المركبة

الشكل الجبري – الحساب في $\mathbb{C}$

- نقول عن العدد المركب z إنه مكتوب على الشكل الجبري إذا كان مكتوبا على الشكل الآتي $z=a+ib$, حيث a و b عددان حقيقيان و $i^2=-1$
- a هو الجزء الحقيقي للعدد المركب z, نرمز له بالرمز $Re(z)$.
- b هو الجزء التخيلي للعدد المركب z, نرمز له بالرمز $Im(z)$.
- يكون العددان المركبان z و z' حيث $z=a+ib$, $z'=a'+ib'$ إذا تحقق ما يلي : $a=a'$ و $b=b'$.
- لكتابة حاصل قسمة عددين مركبين على الشكل الجبري , نضرب كلا من البسط والمقام في مرافق المقام (إن لم يكن حقيقيا) .
- مرافق العدد المركب $z=a+ib$ هو العدد المركب $\overline{z}=a-ib$.
- $z\times\overline{z}=a^2+b^2$.
- $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$, $\overline{z.z'}=\overline{z}.\overline{z'}$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ حيث $(z'\neq 0)$.
- يكون العدد المركب z حقيقيا إذا وفقط إذا كان $Im(z)=0$ إذا وفقط إذا كان $\overline{z}=z$
- يكون العدد المركب z تخيليا صرفا إذا وفقط إذا كان $Re(z)=0$ إذا وفقط إذا كان $\overline{z}=-z$

أمثلة

1) لنكتب العدد المركب $\frac{1+3i}{3-2i}$ على الشكل الجبري :

- لنضرب كلا من البسط والمقام في مرافق المقام ($3+2i$) كما يلي :

$$\frac{1+3i}{3-2i}\times\frac{3+2i}{3+2i}=\frac{3+2i+9i+6i^2}{9+4}=\frac{3+2i+9i-6}{13}=\frac{-3+11i}{13}$$

ومنه $\frac{1+3i}{3-2i}=-\frac{3}{13}+\frac{11}{13}i$.

2) لنحل المعادلة : $\frac{1+iz}{z}=-1+3i$

من أجل $z\neq 0$, $\frac{1+iz}{z}=-1+3i$ تكافئ $1+iz=(-1+3i)z$

وتكافئ $1=(-1+2i)z$

ومنه $z=\frac{1}{-1+2i}=\frac{-1-2i}{1+4}=-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$.

إذن للمعادلة حل وحيد هو $z=-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$

3) لنحل المعادلة : $(1+i)z=\overline{z}-2+3i$.

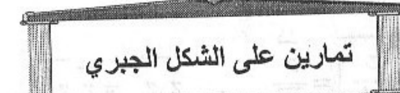
نضع $z=x+iy$ حيث x و y عددان حقيقيان.

لدينا $(1+i)z=\overline{z}-2+3i$ تكافئ $(1+i)(x+iy)=(x-iy)-2+3i$

وتكافئ $(x-y)+i(x+y)=(x-2)+i(-y+3)$

ومنه $\begin{cases}x-y=x-2\\x+y=-y+3\end{cases}$ وبالتالي $\begin{cases}x=-1\\y=2\end{cases}$.

إذن للمعادلة حل وحيد هو $z=-1+2i$.





ليكن العددان المركبان $z=2+3i$, $z'=i-5$.

احسب واكتب على الشكل الجبري $z+z'$, $z-z'$, $2z-3z'$, $z\cdot z'$, z^2 .

الحل



$$z+z'=-3+4i$$
$$z-z'=2+3i-(i-5)=7+2i$$
$$2z-3z'=2(2+3i)-3(i-5)=19+3i$$
$$z\cdot z'=(2+3i)(i-5)=2i-10+3i^2-15i=-13-13i$$
$$z^2=(2+3i)^2=4+12i+9i^2=4+12i-9=-5+12i$$



1) احسب $(3+2i)(3-2i)$. استنتج الشكل الجبري للعدد $\frac{1}{3+2i}$.

2) عين الشكل الجبري للأعداد المركبة : $\frac{1}{1+i}$, $\frac{1}{3-i}$, $\frac{1}{i}$

الحل

1) حساب $(3+2i)(3-2i)$:

$(3+2i)(3-2i)=3^2+2^2=13$, (لأن $z\cdot\overline{z}=x^2+y^2$).

2) كتابة الأعداد على الشكل الجبري :

كتابة $\frac{1}{3+2i}$ على الشكل الجبري : $\frac{1}{3+2i}=\frac{1}{3+2i}\times\frac{3-2i}{3-2i}=\frac{3-2i}{13}=\frac{3}{13}-\frac{2}{13}i$

كتابة $\frac{1}{1+i}$ على الشكل الجبري : $\frac{1}{1+i}=\frac{1}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i}=\frac{1-i}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$

كتابة $\frac{1}{3-i}$ على الشكل الجبري : $\frac{1}{3-i}=\frac{1}{3-i}\times\frac{3+i}{3+i}=\frac{3+i}{10}=\frac{3}{10}+\frac{1}{10}i$

كتابة $\frac{1}{i}$ على الشكل الجبري : $\frac{1}{i}=\frac{1}{i}\times\frac{-i}{-i}=\frac{-i}{1}=-i$



1) اكتب على الشكل الجبري الأعداد المركبة الآتية :

$\frac{1}{2+7i}$, $\frac{4}{\sqrt{3}-i}$, $\frac{2-i}{5+3i}$, $\frac{i}{1-3i}$, $\frac{2+i}{i}$.

2) حل , في $\mathbb{C}$, المعادلة $(1-i)z=3-2i$. أعط الحل على الشكل الجبري.

3) هل أن العدد المركب $2-i$ حل للمعادلة $(1-i)z+1+3i=0$ ؟

4) هل أن العدد المركب $\frac{1+3i}{5}$ حل للمعادلة $5z^2-2z+2=0$ ؟

5) بسط العدد المركب $\frac{\sqrt{7}+5i}{2\sqrt{7}-2i}+\frac{2\sqrt{7}-2i}{\sqrt{7}+5i}$.



1) كتابة الأعداد على الشكل الجبري :

$$\frac{1}{2+7i}=\frac{1}{2+7i}\times\frac{2-7i}{2-7i}=\frac{2-7i}{53}=\frac{2}{53}-\frac{7}{53}i$$

$$\frac{4}{\sqrt{3}-i}=\frac{4}{\sqrt{3}-i}\times\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}+i}=\frac{4\sqrt{3}+4i}{4}=\sqrt{3}+i$$

$$\frac{2-i}{5+3i}=\frac{2-i}{5+3i}\times\frac{5-3i}{5-3i}=\frac{10-6i-5i+3i^2}{34}=\frac{10-6i-5i-3}{34}$$
$$=\frac{7-11i}{34}=\frac{7}{34}-\frac{11}{34}i$$

$$\frac{i}{1-3i}=\frac{i}{1-3i}\times\frac{1+3i}{1+3i}=\frac{i+3i^2}{10}=\frac{-3+i}{10}=-\frac{3}{10}+\frac{1}{10}i$$

$$\frac{1}{2+7i}=\frac{1}{2+7i}\times\frac{2-7i}{2-7i}=\frac{2-7i}{53}=\frac{2}{53}-\frac{7}{53}i$$

$$\frac{2+i}{i}=\frac{2+i}{i}\times\frac{-i}{-i}=\frac{-2i-i^2}{1}=1-2i$$

2) حل المعادلة $(1-i)z=3-2i$:

لدينا $(1-i)z=3-2i$ يكافئ $z=\frac{3-2i}{1-i}$.

كتابة $\frac{3-2i}{1-i}$ على الشكل الجبري : $\frac{3-2i}{1-i}=\frac{3-2i}{1-i}\times\frac{1+i}{1+i}=\frac{5+i}{2}=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}i$

3) لنعوض $2-i$ في المعادلة $(1-i)z+1+3i=0$ فنجد :

$(1-i)(2-i)+1+3i=0$ وهذه تكافئ $2-i-2i-1+1+3i=0$

وتكافئ $2=0$ وهذا غير صحيح , وبالتالي :

العدد المركب $2-i$ ليس حلا للمعادلة $(1-i)z+1+3i=0$.

4) لنعوض $\frac{1+3i}{5}$ في المعادلة $5z^2-2z+2=0$ فنجد :

$5\left(\frac{1+3i}{5}\right)^2-2\left(\frac{1+3i}{5}\right)+2=0$ وهذه تكافئ $\frac{-8+6i}{5}-\frac{2+6i}{5}+2=0$

وتكافئ $-8+6i-2-6i+10=0$

وتكافئ $0=0$ وهذا صحيح وبالتالي:

العدد المركب $\frac{1+3i}{5}$ حل للمعادلة $5z^2-2z+2=0$.

5) تبسيط العدد المركب:

$$\frac{\sqrt{7}+5i}{2\sqrt{7}-2i}+\frac{2\sqrt{7}-2i}{\sqrt{7}+5i}=\frac{\left(\sqrt{7}+5i\right)^2+\left(2\sqrt{7}-2i\right)^2}{\left(2\sqrt{7}-2i\right)\left(\sqrt{7}+5i\right)}=\frac{6+2\sqrt{7}i}{24+8\sqrt{7}i}=\frac{1}{4}$$

الشكل المثلثي – الطويلة والعمدة

من أجل العدد المركب $z=a+ib$, حيث a و b عددان حقيقيان و $i^2=-1$.

- طويلة z هي : $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{z\times\overline{z}}$.

فمثلا : $\left|1+i\sqrt{3}\right|=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=2$

- من أجل $z\neq 0$, العدد الحقيقي θ حيث : $\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{a}{|z|}\\ \sin\theta=\dfrac{b}{|z|}\end{cases}$ هو عمدة للعدد z .

ونكتب $\arg z=\theta+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

فمثلا : لتكن θ عمدة للعدد المركب $1+i\sqrt{3}$. أي أن $\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{1}{2}\\ \sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$

ومنه $\arg z=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

- يكون العدد المركب z حقيقيا إذا وفقط إذا كان $\arg z=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$
- يكون العدد المركب z تخيليا صرفا إذا وفقط إذا كان $\arg z=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

ترميز أولير : من أجل كل عدد حقيقي θ نضع $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$.

نتائج :

$$\left|e^{i\theta}\right|=1\ ,\ \overline{\left(e^{i\theta}\right)}=e^{-i\theta}\ ,\ e^{i(\theta+2k\pi)}=e^{i\theta}\ ,\ e^{i\theta_1}\times e^{i\theta_2}=e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

$$\frac{1}{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}\ ,\ \frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=e^{i(\theta_1-\theta_2)}\ ,\ \left(e^{i\theta}\right)^n=e^{in\theta}.$$

الشكل المثلثي لعدد مركب غير معدوم

- إذا كان z عددا مركبا غير معدوم, طويلته r و θ عمدة له , نكتبه على الشكل الآتي: $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ وهو الشكل المثلثي للعدد المركب z .

ملاحظة : يمكن استعمال ترميز أولير فنحصل على الشكل الآتي : $re^{i\theta}$ وهو , أيضا , الشكل المثلثي للعدد المركب z .

الخلاصة : إذا كتب العدد المركب z على الشكل $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ أو على

الشكل $z = re^{i\theta}$, فقد كتب على الشكل المثلثي.

فمثلا : $1+i\sqrt{3} = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$.

- وإذا كان $z = re^{i\theta}$, حيث $r>0$ فإن $|z| = r$ و $\arg z = \theta + 2k\pi$.
- $r_1 e^{i\theta_1} = r_2 e^{i\theta_2}$, ($r_1>0$ و $r_2>0$) تكافئ $\begin{cases} r_1=r_2 \\ \theta_1=\theta_2+2k\pi \end{cases}$.

الانتقال بالعدد المركب من الشكل الجبري إلى الشكل المثلثي

مثال(1). ليكن العدد المركب $z=\sqrt{3}+i$

۞ لنحسب طويلة z : $|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2} = 2$.

۞ لنحسب عمدة للعدد z : من العلاقتين $\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{2} \end{cases}$ نجد $\theta=\frac{\pi}{6}$.

۞ إذن $z=2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

مثال(2). ليكن العدد المركب $(-1+i)^{12}$

لاحظ أنه من الصعوبة بمكان كتابة هذا العدد على الشكل الجبري لوجود الأس الكبير
لذا نتعامل مع العدد $z=-1+i$ أولا , فنكتبه على الشكل المثلثي :

۞ $|z| = \sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$.

۞ من العلاقتين $\begin{cases} \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$ نجد $\theta=\frac{5\pi}{4}$.

۞ إذن $z=\sqrt{2}\, e^{i\frac{5\pi}{4}}$. ونكمل الحساب بالطريقة الآتية :

$$(-1+i)^{12} = (z)^{12} = (\sqrt{2})^{12} e^{i\frac{60\pi}{4}} = 64e^{i15\pi} = 64(\cos 15\pi + i\sin 15\pi)$$
$$= 64[\cos(\pi+14\pi) + i\sin(\pi+14\pi)]$$
$$= 64(\cos\pi + i\sin\pi) = -64$$

إذن $(-1+i)^{12} = -64$

مثال(3). ليكن العددان المركبان $z_1=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ و $z_2=\sqrt{3}+i$

اكتب الأعداد : z_1 , z_2 , $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل المثلثي . استنتج $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$.

كتابة z_1 على الشكل المثلثي :

۞ $|z_1| = \sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2} = 2$. من العلاقتين $\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ نجد $\theta=\frac{\pi}{4}$.

۞ إذن $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$.

كتابة z_2 على الشكل المثلثي :

۞ $|z_2| = \sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2} = 2$. من العلاقتين $\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{2} \end{cases}$ نجد $\theta=\frac{\pi}{6}$.

۞ إذن $z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

كتابة $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل المثلثي :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)} = e^{i\frac{\pi}{12}}$$

لاحظ أن $\frac{\pi}{12}$ عمدة للعدد $\frac{z_1}{z_2}$.

ولدينا

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{\sqrt{3}+i} = \frac{(\sqrt{2}+i\sqrt{2})(\sqrt{3}-i)}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\,\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

إذن

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{Re\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}{\left|\frac{z_1}{z_2}\right|} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \quad \text{و} \quad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{Im\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}{\left|\frac{z_1}{z_2}\right|} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

مثال(4). لنحل المعادلة $z^3=1$

إذا وضعنا $z=re^{i\theta}$ يكون معنا $r^3e^{i3\theta}=1$ ومنه $r^3e^{i3\theta}=1e^{i(0)}$

وبالتالي : $\begin{cases} r^3=1\\ 3\theta=0+2k\pi\end{cases}$ ومنه $\begin{cases} r=1\\ \theta=\frac{2}{3}k\pi\end{cases}$

إذن للمعادلة $z^3=1$ ثلاثة حلول. نحصل عليها بتعويض k بالأعداد: 0 , 1 , 2 كما يلي:

$z_0=1e^{i(0)}=1$, $z_1=1e^{i\frac{2\pi}{3}}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_2=1e^{i\frac{4\pi}{3}}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

دستور موافر

من كل n من $\mathbb{Q}$, $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$

ملاحظة: بنشر $(\cos\theta+i\sin\theta)^n$ ومطابقته بـ $\cos(n\theta)+\sin(n\theta)$ نحصل على $\cos(n\theta)$ و $\sin(n\theta)$ بدلالة $\cos\theta$ و $\sin\theta$.

فمثلا : $(\cos\theta+i\sin\theta)^2=\cos(2\theta)+i\sin(2\theta)$

وبما أن $(\cos\theta+i\sin\theta)^2=\cos^2\theta-\sin^2\theta+2i\cos\theta\sin\theta$ فإن

$\cos(2\theta)=\cos^2\theta-\sin^2\theta$ و $\sin(2\theta)=2\cos\theta\sin\theta$.

دستور أولر

$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ و $\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

ملاحظة : يستعمل لكتابة $\cos^n\theta$ و $\sin^n\theta$ على شكل عبارة خطية.

فمثلا , لنكتب $\cos^2\theta$ على شكل عبارة خطية :

$$\cos^2x=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2=\frac{e^{i2x}+e^{-i2x}+2}{4}=\frac{2\cos2x+2}{4}=\frac{\cos2x+1}{2}$$





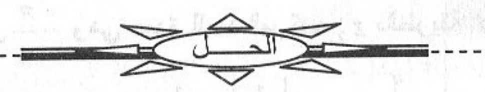
1)احسب طويلة كل عدد من الأعداد المركبة الآتية :

$z_1=3+4i$, $z_2=1-i$, $z_3=5-\frac{i}{2}$, $z_4=3$, $z_5=i-4$, $z_6=i$

$z_7=-5$, $z_8=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$.

اكتب , على الشكل المثلثي , الأعداد الآتية:

$z_1=1+i$, $z_2=1-i$, $z_3=\sqrt{3}+i$, $z_4=1-i\sqrt{3}$, $z_5=-\sqrt{3}-i$



1) حساب طويلة كل عدد :

$|z_1|=|3+4i|=\sqrt{3^2+4^2}=5$, $|z_2|=|1-i|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

$|z_3|=\left|5-\frac{i}{2}\right|=\sqrt{5^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{25+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{101}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{101}$

$|z_4|=|3|=3$ (لأنه إذا كان $z=x$, حيث x عدد حقيقي , فإن $|z|=|x|$)

$|z_5|=|i-4|=\sqrt{(-4)^2+1^2}=\sqrt{17}$

$|z_6|=|i|=1$ (لأنه إذا كان $z=yi$, حيث y عدد حقيقي , فإن $|z|=|y|$)

$|z_7|=|-5|=5$, $|z_8|=\left|\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}|1+i|=1$ (أو استعمل التعريف)

2) كتابة الأعداد على الشكل المثلثي:

العدد $z_1=1+i$:

- لدينا $|z_1|=|1+i|=\sqrt{2}$.
- لتكن θ عمدة للعدد z_1 , من العلاقتين $\begin{cases}\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$ نجد $\theta=\frac{\pi}{4}$.
- $z_1=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$

العدد $z_2=1-i$:

- لدينا $|z_2|=|1-i|=\sqrt{2}$.

• لتكن θ عمدة للعدد z_2 , من العلاقتين $\begin{cases}\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$ نجد $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$.

• $z_2 = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$

ملاحظة : حصلنا على $-\dfrac{\pi}{4}$ وهي عمدة للعدد المركب z_2 بالطريقة الآتية :

نعين أولا α باستعمال العلاقتين : $\begin{cases}\cos\alpha = \left|\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\alpha = \left|-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$ فنجد $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$

ثم نعين θ بملاحظة إشارتي $\cos\theta$ و $\sin\theta$ واستعمال الجدول الآتي :

إذا كان $\cos\theta$	+	−	−	+
وكان $\sin\theta$	+	+	−	−
فإن $\theta =$	α	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$-\alpha$

فنجد $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$. يمكن , أيضا ، استعمال الآلة الحاسبة لتعيين θ .

العدد $z_3 = \sqrt{3} + i$:

• لدينا $|z_3| = \left|\sqrt{3} + i\right| = 2$.

• لتكن θ عمدة للعدد z_3 , من العلاقتين $\begin{cases}\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{1}{2}\end{cases}$ نجد $\theta = \dfrac{\pi}{6}$.

• $z_3 = 2e^{\frac{\pi}{6}i}$

العدد $z_4 = 1 - i\sqrt{3}$:

• لدينا $|z_4| = \left|1 - i\sqrt{3}\right| = 2$.

• لتكن θ عمدة للعدد z_4 , من العلاقتين $\begin{cases}\cos\theta = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ نجد $\theta = -\dfrac{\pi}{3}$.

• $z_4 = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}$

العدد $z_5 = -\sqrt{3} - i$:

• لدينا $|z_5| = \left|-\sqrt{3} - i\right| = 2$.

• لتكن θ عمدة للعدد z_5 , من العلاقتين $\begin{cases}\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = -\dfrac{1}{2}\end{cases}$ نجد $\theta = \dfrac{7\pi}{6}$.

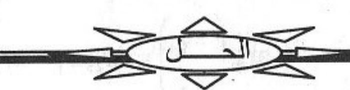
• $z_5 = 2e^{\frac{7\pi}{6}i}$

التمرين 122

ليكن العددان المركبان : $z_1 = 2 + 2i$, $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$.

اكتب كلا من z_1 و z_2 على الشكل المثلثي . استنتج الشكل المثلثي لكل من الأعداد :

$$z_1 \times z_2 \ , \ \frac{z_1}{z_2} \ , \ (z_1)^3 \ , \ \overline{z_1} \ , \ -z_2 \ , \ \frac{(z_1)^2}{z_2}$$



كتابة العدد $z_1 = 2 + 2i$ على الشكل المثلثي:

• لدينا $|z_1| = |2 + 2i| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

• لتكن θ_1 عمدة للعدد z_1 , من العلاقتين $\begin{cases}\cos\theta_1 = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta_1 = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$ نجد $\theta_1 = \dfrac{\pi}{4}$.

• إذن $z_1 = 2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$.

كتابة العدد $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$ على الشكل المثلثي:

• لدينا $|z_2| = |1+i\sqrt{3}| = 2$.

• لتكن θ_2 عمدة للعدد z_2 , من العلاقتين $\begin{cases}\cos\theta_2=\frac{1}{2}\\ \sin\theta_2=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ نجد $\theta_2=\frac{\pi}{3}$.

• إذن $z_2 = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$.

كتابة العدد $z_1\times z_2$ على الشكل المثلثي:

• لدينا $|z_1\times z_2| = |z_1|\times|z_2| = 2\sqrt{2}\times 2 = 4\sqrt{2}$.

• لتكن θ عمدة للعدد $z_1\times z_2$, لدينا $\theta=\theta_1+\theta_2=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}=\frac{7\pi}{12}$.

(لأن $\arg(z_1\cdot z_2)=\arg z_1+\arg z_2$)

• إذن $z_1\times z_2 = 4\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{12}i}$.

كتابة العدد $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل المثلثي:

• لدينا $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.

• لتكن θ عمدة للعدد $\frac{z_1}{z_2}$, $\theta=\theta_1-\theta_2=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{12}$.

(لأن $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\arg z_1-\arg z_2$)

• إذن $\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{12}i}$.

كتابة العدد $(z_1)^3$ على الشكل المثلثي:

• لدينا $|(z_1)^3| = |z_1|^3 = (2\sqrt{2})^3 = 16\sqrt{2}$.

• لتكن θ عمدة للعدد $(z_1)^3$, لدينا $\theta=3\theta_1=\frac{3\pi}{4}$. (لأن $\arg(z^n)=n\arg z$)

• إذن $(z_1)^3 = 16\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$.

كتابة العدد $\overline{z_1}$ على الشكل المثلثي: لدينا $\overline{z_1}=2\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$

(لأنه إذا كان $z=re^{i\theta}$ فإن $\overline{z}=re^{-i\theta}$)

كتابة العدد $-z_2$ على الشكل المثلثي: لدينا $-z_2=2e^{\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)i}=2e^{\frac{4\pi}{3}}$

(لأنه إذا كان $z=re^{i\theta}$ فإن $-z=re^{i(\theta+\pi)}$)

كتابة العدد $\frac{(z_1)^2}{z_2}$ على الشكل المثلثي:

• لدينا $\left|\frac{(z_1)^2}{z_2}\right| = \frac{|(z_1)^2|}{|z_2|} = \frac{2|z_1|}{|z_2|} = 2\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = 2\sqrt{2}$

• لتكن θ عمدة للعدد $\frac{(z_1)^2}{z_2}$, لدينا $\theta=2\theta_1-(-\theta_2)=2\theta_1+\theta_2=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}$

• إذن $\frac{(z_1)^2}{z_2} = 2\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{6}i}$.

التمرين 123

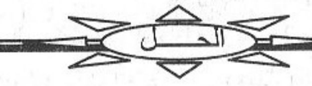
لتكن الأعداد المركبة : $z_1=e^{i\frac{\pi}{3}}$, $z_2=e^{i\frac{\pi}{4}}$, $Z=\frac{z_1}{z_2}$.

1) اكتب Z على الشكل المثلثي .

2) اكتب كلا من العددين z_1 و z_2 على الشكل الجبري .

استنتج الشكل الجبري للعدد Z .

3) استنتج القيمتين المضبوطتين لكل من $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$.



1) اكتابة Z على الشكل المثلثي :

لدينا $Z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}}=e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}=e^{i\frac{\pi}{12}}$.

2) كتابة كل من العددين z_1 و z_2 على الشكل الجبري .

لدينا
$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$z_2 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

استنتاج الشكل الجبري للعدد Z لدينا
$$Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{2} + i\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}i$$

3) استنتاج القيمتين المضبوطتين لكل من $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$.

لدينا
$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}}{1} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \quad , \quad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}{1} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

الأعداد المركبة والهندسة

المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- لاحقة النقطة $M(x, y)$ هي العدد المركب $z_M = x + iy$.

فمثلا , لنعين E مجموعة النقط M ذات اللاحقة z , بحيث يكون العدد المركب : $(2-i)z + 3 - 4i$ تخيليا صرفا.

نضع $z = x + iy$ حيث x و y عددان حقيقيان .

1) لنكتب $(2-i)z + 3 - 4i$ على الشكل الجبري :
$$(2-i)z + 3 - 4i = 2x + y + 3 + i(-x + 2y - 4)$$

2) يكون العدد $(2-i)z + 3 - 4i$ تخيليا صرفا إذا وفقط إذا كان $2x + y + 3 = 0$

إذا وفقط إذا كان $y = -2x - 3$

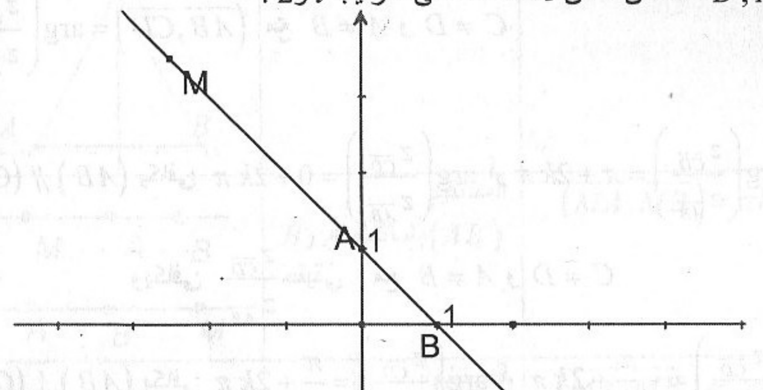
3) إذن مجموعة النقط E هي المستقيم ذو المعادلة $y = -2x - 3$.

ومثلا, لنعين E مجموعة النقط M ذات اللاحقة z , بحيث يكون العدد المركب : $\frac{z - i}{z - 2}$ حقيقيا. مع $(z \neq 2)$

يكون العدد $\frac{z - i}{z - 2}$ حقيقيا إذا وفقط إذا كان $z = i$ أو $\arg\left(\frac{z - i}{z - 2}\right) = k\pi$

إذا وفقط إذا كان $M = A$ أو $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = k\pi$

حيث A , B النقطتان اللتان لاحقتاهما على الترتيب i و 2 .

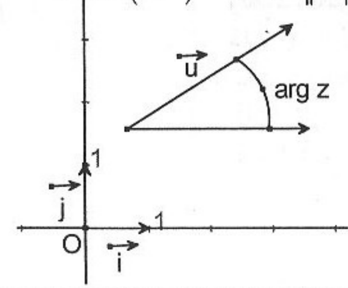


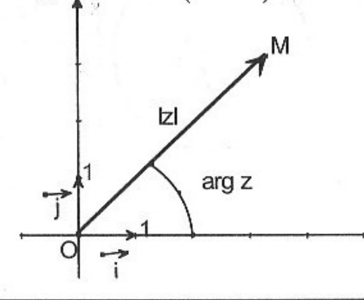
إذن مجموعة النقط E هي المستقيم (AB) باستثناء النقطة B .

- لاحقة الشعاع $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ هي العدد المركب $z_{\vec{u}} = x + iy$.
- لاحقة I منتصف القطعة $[AB]$ هي $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$.
- لاحقة G مرجح النقط A , B , C , المرفقة بالمعاملات a , b , c (على الترتيب) هي $Z_G = \frac{aZ_A + bZ_B + cZ_C}{a + b + c}$ مع $a + b + c \neq 0$.

حالة خاصة : لاحقة مركز ثقل المثلث ABC هي : $\frac{Z_A + Z_B + Z_C}{3}$

- لاحقة الشعاع $\vec{u}(x, y)$ هي : $Z_{\vec{u}} = x + iy$.
- $Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_B - Z_A$, $Z_{\vec{u}+\vec{v}} = Z_{\vec{u}} + Z_{\vec{v}}$, $Z_{k\vec{u}} = kZ_{\vec{u}}$.
- إذا كان z $(z \neq 0)$ لاحقة النقطة M فإن $|z| = OM$ و $\arg z = (\vec{i}, \overrightarrow{OM})$.
- إذا كان z $(z \neq 0)$ لاحقة الشعاع $\vec{u}$ فإن $|z| = \|\vec{u}\|$ و $\arg z = (\vec{i}, \vec{u})$.





• $AB = |z_B - z_A|$, $(\vec{i},\overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)$ مع $A \neq B$.

• $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{CD}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}\right)$ مع $A \neq B$ و $C \neq D$.

نتائج :

• $(AB)//(CD)$ يكافئ $\arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{CD}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}\right) = 0+2k\pi$ أو $\arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{CD}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}\right) = \pi+2k\pi$

ويكافئ $\frac{z_{\overrightarrow{CD}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}$ حقيقي , مع $A \neq B$ و $C \neq D$

• $(AB)\perp(CD)$ يكافئ $\arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{CD}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}\right) = \frac{\pi}{2}+2k\pi$, أو $\arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{CD}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}\right) = -\frac{\pi}{2}+2k\pi$

ويكافئ $\frac{z_{\overrightarrow{CD}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}$ تخيلي صرف , مع $A \neq B$ و $C \neq D$

• النقط A , B , C على استقامة واحدة يكافئ:
$\arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}\right) = 0+2k\pi$ أو $\arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}\right) = \pi+2k\pi$.

• مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث $|z - z_A| = r$ مع $(r>0)$ هي الدائرة التي مركزها A ونصف قطرها r .

• مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث $|z - z_A| = |z - z_B|$ مع $(z_A \neq z_B)$ هي منصف القطعة $[AB]$.

طبيعة بعض مجموعات النقط :

لتكن النقطتان المختلفتان A و B من المستوي.

مجموعة النقط M بحيث	هي:	الرسم
$MA = k$	• الدائرة التي مركزها A ونصف قطرها k , إذا كان $k>0$. • مجموعة خالية, إذا كان $k<0$. • النقطة A, إذا كان $k=0$.	
$MA = MB$	منصف القطعة $[AB]$	
$(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) = \pi k$	المستقيم (AB) باستثناء A و B	
$(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) = 2\pi k$	المستقيم (AB) باستثناء القطعة $[AB]$	
$(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2}+\pi k$	الدائرة التي قطرها $[AB]$ باستثناء النقطتين A و B	
$(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2}+2\pi k$	نصف الدائرة التي قطرها $[AB]$ باستثناء النقطتين A و B وبحيث يكون MAB مباشرا	
$(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) = -\frac{\pi}{2}+2\pi k$	نصف الدائرة التي قطرها $[AB]$ باستثناء النقطتين A و B وبحيث يكون MAB غير مباشر.	
$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$	الدائرة التي قطرها $[AB]$	

التمرين 124

في المستوي المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$, نعتبر النقطة A ذات اللاحقة $a=2-3i$ والنقطة B ذات اللاحقة $b=5-i$.
احسب المسافات OA , OB , AB . ثم استنتج طبيعة المثلث OAB.

الحل

حساب المسافة OA: $OA=|z_A-z_O|=|2-3i|=\sqrt{13}$.
حساب المسافة OB: $OB=|z_B-z_O|=|5-i|=\sqrt{26}$.
حساب المسافة AB: $AB=|z_B-z_A|=|3+2i|=\sqrt{13}$.
بما أن $OA=AB$ و $OA^2+AB^2=OB^2$ فإن المثلث OAB قائم في A ومتساوي الساقين.

التمرين 125

في المستوي المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$.
عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z في كل حالة من الحالات الآتية
1) $|z-2|=|z-i|$.
2) $|z-3i|=2$.
3) $|z-2|=|2z+i|$.

الحل

1) نضع $|z_M-z_A|=|z_M-z_B|$ حيث A و B نقطتان من المستوي لاحقتاهما ,على الترتيب, 2 , i . إذن $AM=BM$.
مجموعة النقط , هي منصف القطعة $[AB]$.
2) نضع $|z_M-z_C|=2$ حيث C نقطة من المستوي لاحقتها $3i$. إذن $CM=2$
مجموعة النقط هي الدائرة التي مركزها C ونصف قطرها 2 .
3) لدينا $|z-2|=|2z+i|=2\left|z+\frac{1}{2}i\right|$ ومنه $|z_M-z_A|=2|z_M-z_B|$
حيث A و B نقطتان من المستوي

لاحقتاهما ,على الترتيب, 2 , $-\frac{i}{2}$. إذن $AM=2BM$.
من أجل تعيين مجموعة النقط M في هذه الحالة نسلك الطريقة الآتية :
لدينا $MA=2MB$ تكافئ $MA^2=4MB^2$
تكافئ $\overrightarrow{MA}^2=4\overrightarrow{MB}^2$
وتكافئ $(\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB})\cdot(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB})=0$
لندخل G_1 مرجح النقطتين A و B المرفقتين , على الترتيب , بالمعاملين 1 و -2.
وندخل G_2 مرجح النقطتين A و B المرفقتين , على الترتيب , بالمعاملين 1 و 2 .
إذن $(1-(-2))\overrightarrow{MG_1}\cdot(1+2)\overrightarrow{MG_2}=0$ أي أن $3\overrightarrow{MG_1}\cdot3\overrightarrow{MG_2}=0$
ومنه $\overrightarrow{MG_1}\cdot\overrightarrow{MG_2}=0$ وبالتالي $\overrightarrow{MG_1}\perp\overrightarrow{MG_2}$.
إذن مجموعة النقط هي الدائرة التي قطرها $[G_1G_2]$.

التمرين 126

في المستوي المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$, نعتبر النقطة A ذات اللاحقة $a=5+3i$ والنقطة B ذات اللاحقة $b=5-8i$.
هل المثلث OAB قائم في O ؟

الحل

نعلم أن $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=\arg\left(\frac{b}{a}\right)$.
لدينا $\frac{b}{a}=\frac{5-8i}{5+3i}\times\frac{5-3i}{5-3i}=\frac{1-55i}{34}$.
وبما أن $\frac{b}{a}\neq iy$ حيث y عدد حقيقي غير معدوم , فإن $\arg\left(\frac{b}{a}\right)\neq\pm\frac{\pi}{2}$.
إذن المثلث OAB ليس قائما في O .

التمرين 127

في المستوي المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$.الأسئلة مستقلة عن بعضها البعض

1)احسب طويلة كل عدد من الأعداد المركبة الآتية: $(7+35i)(3+2i)$, $\frac{7-35i}{3-2i}$, $\frac{(5-3i)(1+i)}{4+i}$.

2) عين كل النقط M ذات اللاحقة z بحيث $z\cdot\bar{z}=4$.

3) لتكن النقطة A ذات اللاحقة $2+3i$.

عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z , بحيث : $\left|z-(2+3i)\right|=5$.

4) ليكن $j=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$. احسب $|j|$. برهن أن $j^2=\bar{j}$. استنتج أن $j^3=1$



الحل

(1

$$\left|(7+35i)(3+2i)\right|=\left|7+35i\right|\times\left|3+2i\right|=\sqrt{1274}\times\sqrt{13}$$
$$=\sqrt{13\times49\times2}\times\sqrt{13}=\sqrt{13}\times7\times\sqrt{2}\times\sqrt{13}=91\sqrt{2}$$

$$\left|\frac{7-35i}{3-2i}\right|=\frac{\left|7-35i\right|}{\left|3-2i\right|}=\frac{\sqrt{1274}}{\sqrt{13}}=\sqrt{\frac{1274}{13}}=\sqrt{98}=7\sqrt{2}$$

$$\left|\frac{(5-3i)(1+i)}{4+i}\right|=\frac{\left|(5-3i)(1+i)\right|}{\left|4+i\right|}=\frac{\left|5-3i\right|\left|1+i\right|}{\left|4+i\right|}=\frac{\sqrt{34}\times\sqrt{2}}{\sqrt{17}}$$
$$=\frac{\sqrt{17}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{\sqrt{17}}=2$$

2) نضع $z=x+iy$.

الشرط $z\cdot\bar{z}=4$ يكافئ $x^2+y^2=4$ (لأن $z\cdot\bar{z}=x^2+y^2$)

إذن مجموعة النقط M هي الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 2 .

3) الشرط $\left|z-(2+3i)\right|=5$ يكافئ $\left|z_M-z_A\right|=5$

ويكافئ $AM=5$.

إذن مجموعة النقط M هي الدائرة التي مركزها A ونصف قطرها 5.

(4

$$|j|=\left|-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$$

$$j^2=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\bar{j}$$

لدينا $j^3=j^2\times j=\bar{j}\times j=|j|^2=1$ (لأن $|z|^2=z\cdot\bar{z}$)

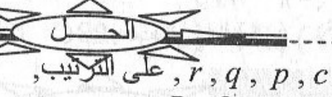
التمرين128

ABC مثلث في الاتجاه المباشر .

أنشئ النقط p وQ وR, بحيث:

$$\begin{cases}AP=BC\\ \left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AP}\right)=\frac{\pi}{2}\end{cases}\ldots(1)\ ,\ \begin{cases}BQ=CA\\ \left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BQ}\right)=\frac{\pi}{2}\end{cases}\ldots(2)\ ,\ \begin{cases}CR=AB\\ \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CR}\right)=\frac{\pi}{2}\end{cases}\ldots(3)$$

برهن أن للمثلثين PQR و ABC نفس مركز الثقل.



الحل

لتكن الأعداد: $a\ ,\ b\ ,\ c\ ,\ p\ ,\ q\ ,\ r$, على الترتيب, لواحق النقط : $A\ ,B\ ,C\ ,P\ ,Q\ ,R$.

لدينا (1) يكافئ $p-a=i(c-b)$

(2) يكافئ $q-b=i(a-c)$

(3) يكافئ $r-c=i(b-a)$

بجمع المساويات طرفا إلى طرف نجد : $p+q+r=a+b+c$ ومنه

$$\frac{p+q+r}{3}=\frac{a+b+c}{3}$$

إذن للمثلثين PQR و ABC نفس مركز الثقل.

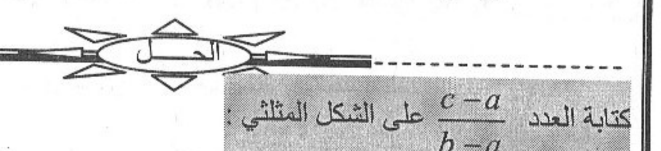


التمرين129

في المستوي المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$, نعتبر النقط: $C\ ,B\ ,A$

التي لواحقها على الترتيب $a=1$, $b=1+2i$, $c=1+\sqrt{3}+i$.

اكتب العدد $\frac{c-a}{b-a}$ على الشكل المثلثي . استنتج طبيعة المثلث ABC .



الحل

كتابة العدد $\frac{c-a}{b-a}$ على الشكل المثلثي :

$$\frac{c-a}{b-a}=\frac{1+\sqrt{3}+i-1}{1+2i-1}=\frac{\sqrt{3}+i}{2i}=\frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{i\frac{\pi}{2}}}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

إذن $\left|\frac{c-a}{b-a}\right|=1$ و $\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)=-\frac{\pi}{3}$

لدينا $\frac{AC}{AB}=\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=\left|\frac{c-a}{b-a}\right|=1$ ومنه $AC=AB$

ولدينا $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)=-\frac{\pi}{3}$

استنتاج طبيعة المثلث ABC المثلث ABC متساوي الساقين (لأن $AC=AB$)



ليكن z عددا مركبا يختلف عن $-i$. نضع : $u=\frac{z\left(\overline{z}-i\right)}{z+i}$

1. بين أن $|u|=|z|$.
2. عين A مجموعة النقط $M(z)$ بحيث يكون u تخيليا صرفا.

الحل

1. $|u|=|z|$

لدينا $u=\frac{z\left(\overline{z}-i\right)}{z+i}$ ومنه $|u|=\left|\frac{z\left(\overline{z}-i\right)}{z+i}\right|=\frac{\left|z\left(\overline{z}-i\right)\right|}{|z+i|}=\frac{|z|\left|\overline{z}-i\right|}{|z+i|}$

وبما أن $\overline{z}-i=\overline{z+i}$ فإن $\left|\overline{z}-i\right|=\left|\overline{z+i}\right|=|z+i|$.

إذن $|u|=|z|$.

2. تعيين A مجموعة النقط $M(z)$

ليكن z عددا مركبا يختلف عن $-i$: إن $M(z)\in A$ تكافئ $u\in i\mathbb{R}$

أي أن $\overline{u}=-u$ ، لكن $u=-\overline{u}$ تكافئ $\frac{z\left(\overline{z}-i\right)}{z+i}=-\frac{\overline{z}\left(z+i\right)}{\overline{z}-i}$

وتكافئ $z\left(\overline{z}-i\right)^2+\overline{z}\left(z+i\right)^2=0$

وتكافئ $z\overline{z}^2-z+z^2\overline{z}-\overline{z}=0$

وتكافئ $z\overline{z}\left(z+\overline{z}\right)-\left(z+\overline{z}\right)=0$

وتكافئ $\left(z+\overline{z}\right)\left(z\overline{z}-1\right)=0$

وتكافئ ($z+\overline{z}=0$ أو $z\overline{z}-1=0$)

نضع $z=x+iy$ حيث $(x,y)\neq B(0,-1)$ ومنه

$M(z)\in A$ تكافئ ($x+y=0$ أو $x^2+y^2=1$)

لتكن (C) الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 1.

وليكن المستقيم $(D): x+y=0$.

إذن المجموعة $A=\left[(C)\cup(D)\right]-\{B\}$

المعادلات من الدرجة الثانية

I) المعادلات من الشكل : $z^2=a$, حيث a عدد حقيقي .

- إذا كان $a\geq 0$ فإن للمعادلة حلان حقيقيان هما : $z_1=-\sqrt{a}$ و $z_2=\sqrt{a}$.
- إذا كان $a<0$ فإن للمعادلة حلان تخيليان صرفان ومترافقان هما : $z_1=-i\sqrt{-a}$ و $z_2=i\sqrt{-a}$.

أمثلة : حل في $\mathbb{C}$ المعادلات الآتية :

$z^2=-3$, $z^2+\frac{3}{4}=0$, $z^2=\cos^2\theta-1$, $z+\frac{1}{z}=0$.

لنحل المعادلة $z^2=-3$ في $\mathbb{C}$:

نضع $z^2=(-1)(3)=\left(i^2\right)(3)=3i^2$ (لأن $i^2=-1$)

ومنه الحلان هما : $z_1=-i\sqrt{3}$, $z_2=i\sqrt{3}$.

II) المعادلات من الشكل : $az^2+bz+c=0$, حيث a , b , c أعداد حقيقية مع $a\neq 0$.

- إذا كان $\Delta\geq 0$ فإن للمعادلة حلان حقيقيان هما: $z_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $z_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- إذا كان $\Delta<0$ فإن للمعادلة حلان مركبان مترافقان .

ملاحظة : في $\mathbb{C}$ يمكننا دائما الحصول على التحليل الآتي :

$az^2+bz+c=a\left(z-z_1\right)\left(z-z_2\right)$, حيث z_1 و z_2 جذرا كثير الحدود az^2+bz+c .

أمثلة : حل في $\mathbb{C}$ المعادلات الآتية :

$2z^2-3z+4=0$, $z^2-2z+2=0$, $2z^4+z^2-10=0$

لنحل المعادلة $2z^2-3z+4=0$ في $\mathbb{C}$:

ليكن المميز $\Delta=(-3)^2-4(2)(4)=-23$ أي أن $\Delta=23i^2$ (لأن $i^2=-1$)

إذن حلا المعادلة هما :

$$z_1=\frac{-(-3)-i\sqrt{23}}{2(2)}=\frac{3-i\sqrt{23}}{4}=\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{23}}{4}i$$

$$z_2=\frac{-(-3)+i\sqrt{23}}{2(2)}=\frac{3+i\sqrt{23}}{4}=\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{23}}{4}i$$

III) المعادلات من الشكل : $z^2=z_0$ ، حيث z_0 عدد مركب معطى .

1. العدد المعطى z_0 مكتوب على الشكل الجبري .

فمثلا : حل , في $\mathbb{C}$, المعادلة : $z^2=3+4i$. نضع $z=x+iy$

إذن $(x+iy)^2=3+4i$ ومنه $x^2+2xyi-y^2=3+4i$ ...(1)

وبما أن $z^2=3+4i$ فإن $|z^2|=|3+4i|=5$ وبالتالي $|z|^2=5$ (لأن $|z^2|=|z|^2$)

لكن $|z|^2=5$ تكافئ $x^2+y^2=5$ ...(2) .

من (1) و (2) نجد الجملة : $\begin{cases}x^2-y^2=3\\x^2+y^2=5\\2xy=4\end{cases}$.

تعطي المعادلتان الأولى والثانية : $x^2=4$ و $y^2=1$

وبتطبيق الشرط الثالث $xy=2$, نلاحظ أن للعددين الحقيقيين x و y نفس الإشارة

إذن حلا المعادلة هما : $z_1=2+i$, $z_2=-2-i$.

2. العدد المعطى z_0 مكتوب على الشكل المثلثي .

نضع $z^2=re^{i\theta}$, حيث θ عمدة للعدد المركب z_0 و r طويلته .

الحلان هما $z_1=\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ و $z_2=-\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$.

فمثلا : حل , في $\mathbb{C}$, المعادلة : $z^2=2e^{\frac{\pi}{3}i}$.

حلا المعادلة هما $z_1=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{6}i}$ و $z_1=-\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{6}i}$.

IV) المعادلات من الشكل : $az^2+bz+c=0$, حيث a , b , c أعداد مركبة مع $a\neq 0$.

فمثلا : حل , في $\mathbb{C}$, المعادلة : $(1+i)z^2+iz-1=0$.

لنحسب المميز Δ :

$$\Delta=b^2-4ac=(i)^2-4(1+i)(-1)=-1+4(1+i)=3+4i$$

لنبحث عن عدد مركب δ بحيث $\delta^2=3+4i$ (δ هو أحد الجذرين التربيعيين للعدد Δ)

وحسب المثال السابق , $\delta=2+i$.

إذن حلا المعادلة هما :

$$z_1=\frac{-b-\delta}{2a}=\frac{-i-(2+i)}{2(1+i)}=\frac{-2-2i}{2(1+i)}=-1$$

$$z_2=\frac{-b+\delta}{2a}=\frac{-i+(2+i)}{2(1+i)}=\frac{2}{2(1+i)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$$

ومثلا : حل , في $\mathbb{C}$, المعادلة : $z^2-(\sqrt{3}-3i)z-2(1+i\sqrt{3})=0$.

لنحسب المميز Δ :

$$\Delta=b^2-4ac=(\sqrt{3}-3i)^2-4(1)(-2-2\sqrt{3}i)=2+2\sqrt{3}i$$

لنبحث عن عدد مركب δ بحيث $\delta^2=2+2\sqrt{3}i$

(δ هو أحد الجذرين التربيعيين للعدد Δ)

نضع $\delta=x+iy$ ومنه الجملة $\begin{cases}x^2-y^2=2...(1)\\x^2+y^2=4...(2)\\2xy=2\sqrt{3}...(3)\end{cases}$

وبجمع (1) و (2) نجد $2x^2=6$ وهذا يكافئ ($x=-\sqrt{3}$ أو $x=\sqrt{3}$)

ومن أجل $x=\sqrt{3}$ وباستعمال (3) نجد $y=1$. إذن $\delta=\sqrt{3}+i$

إذن حلا المعادلة هما :

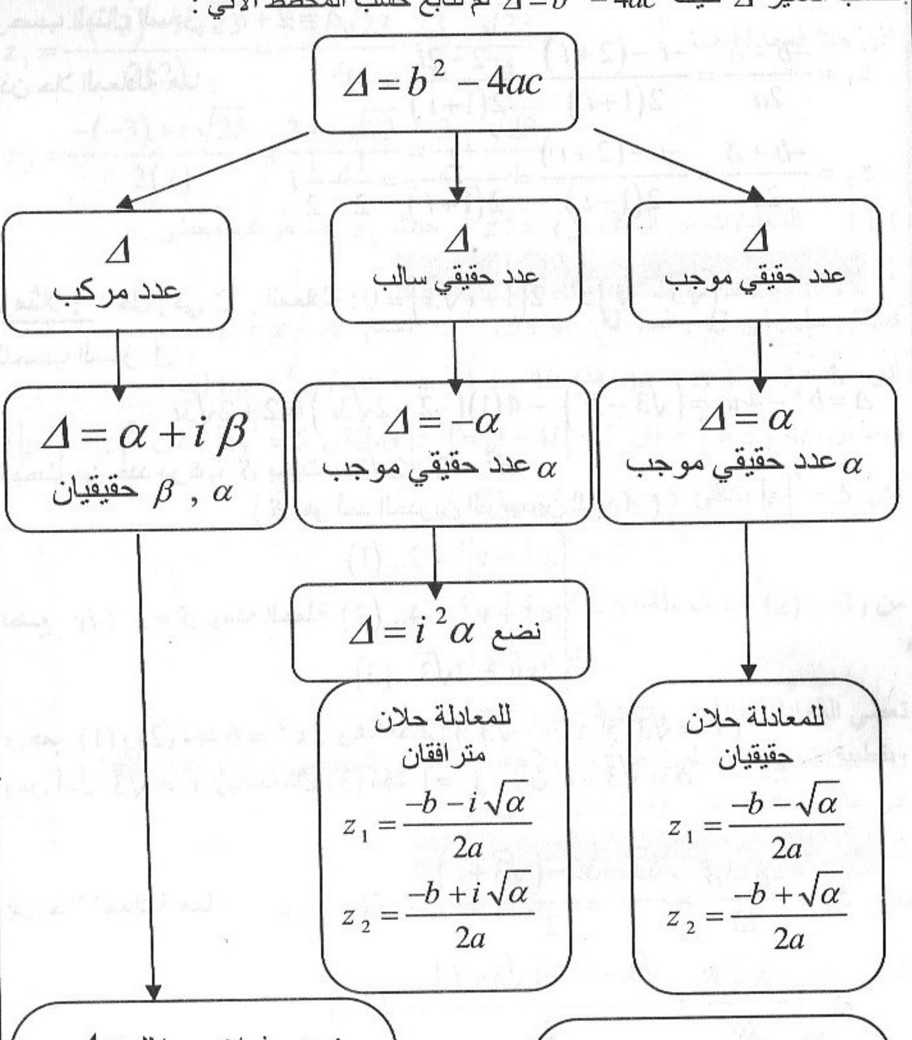
$$z_1=\frac{-b-\delta}{2a}=\frac{\sqrt{3}-3i-(\sqrt{3}+i)}{2}=-2i$$

$$z_2=\frac{-b+\delta}{2a}=\frac{\sqrt{3}-3i+(\sqrt{3}+i)}{2}=\sqrt{3}-i$$

مخطط حل المعادلة $az^2+bz+c=0$, في $\mathbb{C}$.

حيث a و b و c أعداد حقيقية أو أعداد مركبة.

نحسب المميز Δ حيث $\Delta=b^2-4ac$ ثم نتابع حسب المخطط الآتي :



التمرين 131

حل , في $\mathbb{C}$,المعادلات الآتية :

$$z^2-\sqrt{3}z-i=0 \quad , \quad z^2-(1+2i)z+i-1=0 \quad , \quad z^2+z+1=0$$

$$z^2-(3+4i)z-1+5i=0 \quad , \quad z^2-(5-14i)z-2(5i+12)=0$$

$$z^4-30z^2+289=0 \quad , \quad z^4+10z^2+169=0 \quad , \quad 4z^2-2z+1=0 .$$

الحل

$z^2+z+1=0$

لنحسب المميز Δ : $\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4(1)(1)=-3$ أي أن $\Delta=3i^2$

إذن الحلان هما : $z_1=\frac{-(1)-i\sqrt{3}}{2(1)}=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$z_2=\frac{-(1)+i\sqrt{3}}{2(1)}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$z^2-(1+2i)z+i-1=0$

لنحسب المميز Δ : $\Delta=b^2-4ac=(1+2i)^2-4(1)(i-1)=1$

إذن الحلان هما : $z_1=\frac{1+2i-1}{2}=i$, $z_1=\frac{1+2i+1}{2}=1+i$

$z^2-\sqrt{3}z-i=0$

لنحسب المميز Δ : $\Delta=b^2-4ac=(-\sqrt{3})^2-4(1)(-i)=3+4i$

لنبحث عن عدد مركب δ بحيث $\delta^2=3+4i$ (δ هو أحد الجذرين التربيعيين للعدد Δ)

نضع $\delta=x+iy$, لتكن الجملة : $\begin{cases} x^2-y^2=3 & ...(1) \\ x^2+y^2=5 & ...(2) \\ 2xy=4 & ...(3) \end{cases}$

بجمع المعادلتين (1) و(2) نجد $2x^2=8$ ومنه $x^2=4$ وبالتالي($x=-2$ أو $x=2$)

من أجل $x=2$ وبالتعويض في (3) نجد : $y=1$.

إذن $\delta=2+i$ ومنه حلا المعادلة هما :

$$z_1=\frac{-(-\sqrt{3})-(2+i)}{2(1)}=\frac{\sqrt{3}-2-i}{2}=\frac{\sqrt{3}-2}{2}-\frac{1}{2}i$$

$$z_2=\frac{-(-\sqrt{3})+(2+i)}{2(1)}=\frac{\sqrt{3}+2+i}{2}=\frac{\sqrt{3}+2}{2}+\frac{1}{2}i$$

$z^2-(5-14i)z-2(5i+12)=0$

لنحسب المميز Δ :

$$\Delta=b^2-4ac=(5-14i)^2-4(1)(-10i-24)=-75-100i=-25(3+4i)$$

باستعمال السؤال السابق نجد : $\Delta=\left[5i(2+i)\right]^2$ (لأن $(2+i)^2=3+4i$)

إذن الحلان هما :

$$z_1=\frac{-(5-14i)-5i(2+i)}{2(1)}=2i$$

$$z_2=\frac{-(5-14i)+5i(2+i)}{2(1)}=-5+12i$$

$z^2-(3+4i)z-1+5i=0$

لنحسب المميز Δ : $\Delta=b^2-4ac=(3+4i)^2-4(1)(-1+5i)=-3+4i$

لنبحث عن عدد مركب δ بحيث $\delta^2=-3+4i$ (δ هو أحد الجذرين التربيعيين للعدد Δ)

نضع $\delta=x+iy$, لتكن الجملة : $\begin{cases}x^2-y^2=-3 & ...(1)\\ x^2+y^2=5 & ...(2)\\ 2xy=4 & ...(3)\end{cases}$

بجمع المعادلتين (1) و(2) نجد $2x^2=2$ ومنه $x^2=1$ وبالتالي($x=-1$ أو $x=1$)

من أجل $x=1$ وبالتعويض في (3) نجد : $y=2$.

إذن $\delta=1+2i$ ومنه حلا المعادلة هما :

$$z_2=\frac{3+4i+(1+2i)}{2(1)}=2+3i\;,\;z_1=\frac{3+4i-(1+2i)}{2(1)}=1+i$$

$z^4+10z^2+169=0$

نضع $Z=z^2$, المعادلة $z^4+10z^2+169=0$ تكافئ $\begin{cases}Z=z^2\\ Z^2+10Z+169=0\end{cases}$

لنحل , الآن , المعادلة $Z^2+10Z+169=0$:

ليكن المميز Δ : $\Delta=(10)^2-4(1)(169)=-576$, أي أن $\Delta=(24)^2i^2$

إذن الحلان هما :

$$Z_2=\frac{-10+24i}{2(1)}=-5+12i\;,\;Z_1=\frac{-10-24i}{2(1)}=$$

• من أجل $Z=-5-12i$, لدينا $z^2=-5-12i$

نضع $z=x+yi$ ومنه لتكن الجملة : $\begin{cases}x^2-y^2=-5...(1)\\ x^2+y^2=13...(2)\\ 2xy=-12...(3)\end{cases}$

بجمع (1) و(2) نجد : $2x^2=8$ ومنه $x^2=4$ وبالتالي : ($x=-2$ أو $x=2$)

ومن أجل $x=-2$ نجد : $y=3$, ومن أجل $x=2$ نجد : $y=-3$

إذن للمعادلة $z^2=-5-12i$ حلان هما : $z_1=-2+3i$, $z_2=2-3i$.

• من أجل $Z=-5+12i$, لدينا $z^2=-5+12i$

نضع $z=x+yi$ ومنه لتكن الجملة : $\begin{cases}x^2-y^2=-5...(1)\\ x^2+y^2=13...(2)\\ 2xy=12...(3)\end{cases}$

بجمع (1) و(2) نجد : $2x^2=8$ ومنه $x^2=4$ وبالتالي : ($x=-2$ أو $x=2$)

ومن أجل $x=-2$ نجد : $y=-3$, ومن أجل $x=2$ نجد : $y=3$

إذن للمعادلة $z^2=-5+12i$ حلان هما : $z_3=-2-3i$, $z_4=2+3i$.

الخلاصة : للمعادلة $z^4+10z^2+169=0$ أربعة حلول هي :

$z_1=-2+3i$, $z_2=2-3i$, $z_3=-2-3i$, $z_4=2+3i$.

$z^4-30z^2+289=0$

نضع $Z=z^2$, المعادلة $z^4-30z^2+289=0$ تكافئ $\begin{cases}Z=z^2\\ Z^2-30Z+289=0\end{cases}$

لنحل , الآن , المعادلة $Z^2-30Z+289=0$:

ليكن المميز Δ : $\Delta=(-30)^2-4(1)(289)=-256$, أي أن $\Delta=(16)^2i^2$

إذن الحلان هما :

$$Z_2=\frac{30+16i}{2(1)}=15+8i\;,\;Z_1=\frac{30-16i}{2(1)}=15-8i$$

• من أجل $Z=15-8i$, لدينا $z^2=15+8i$

نضع $z = x + yi$ ومنه لتكن الجملة :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 15...(1) \\ x^2 + y^2 = 17...(2) \\ 2xy = -8...(3) \end{cases}$$

بجمع (1) و(2) نجد : $2x^2 = 32$ ومنه $x^2 = 16$ وبالتالي : ($x = -4$ أو $x = 4$)
ومن أجل $x = -4$ نجد : $y = 1$, ومن أجل $x = 4$ نجد : $y = -1$
إذن للمعادلة $z^2 = 15 - 8i$ حلان هما : $z_1 = -4 + i$, $z_2 = 4 - i$.

• من أجل $Z = 15 + 8i$, لدينا $z^2 = 15 + 8i$

نضع $z = x + yi$ ومنه لتكن الجملة :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 15...(1) \\ x^2 + y^2 = 17...(2) \\ 2xy = 8...(3) \end{cases}$$

بجمع (1) و(2) نجد : $2x^2 = 32$ ومنه $x^2 = 16$ وبالتالي : ($x = -4$ أو $x = 4$)
ومن أجل $x = -4$ نجد : $y = -1$, ومن أجل $x = 4$ نجد : $y = 1$
إذن للمعادلة $z^2 = 15 + 8i$ حلان هما : $z_3 = -4 - i$, $z_4 = 4 + i$.

الخلاصة : للمعادلة $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$ أربعة حلول هي :
$z_1 = -4 + i$, $z_2 = 4 - i$, $z_3 = -4 - i$, $z_4 = 4 + i$.

الأعداد المركبة والتحويلات النقطية

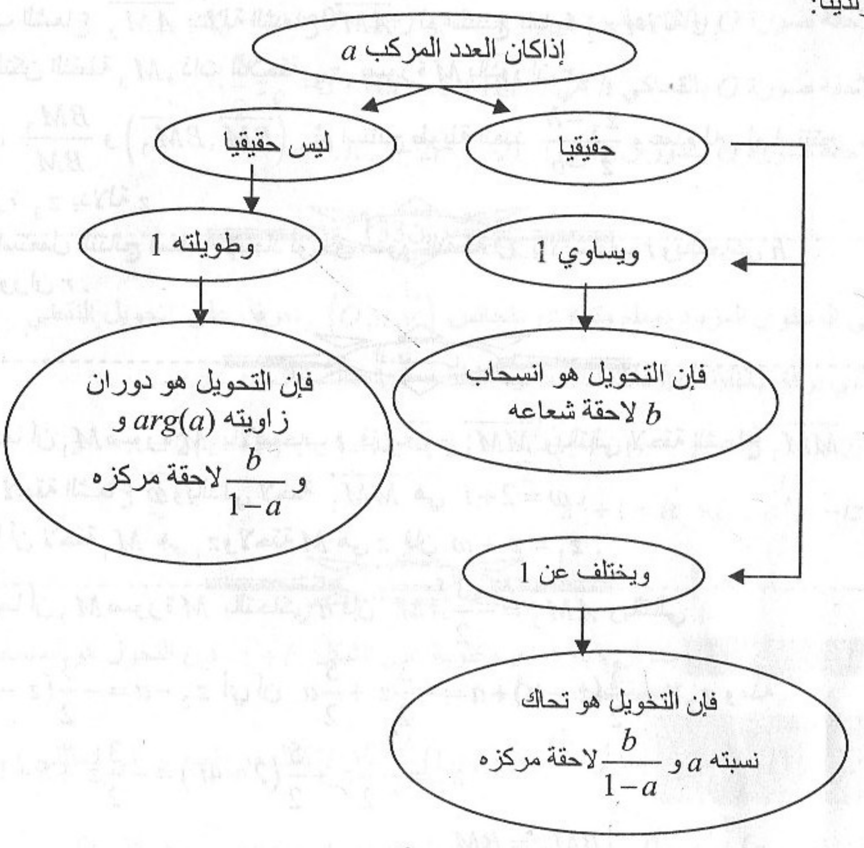
M و M' و Ω نقط لواحقها, على الترتيب, z و z' و ω .

• نقول عن النقطة M' إنها صورة M بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}$ ذو اللاحقة b إذا وفقط إذا كان $z' = z + b$.

• نقول عن النقطة M' إنها صورة M بالدوران الذي مركزه Ω وزاويته θ إذا وفقط إذا كان $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$.

• نقول عن النقطة M' إنها صورة M بالتحاكي الذي مركزه Ω ونسبته k إذا وفقط إذا كان $z' - \omega = k(z - \omega)$.

ملاحظة : يمكن كتابة عبارة z' على الشكل $z' = az + b$ حيث a و b عددان مركبان ولدينا:



التمرين 132

في المستوي المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$, نعتبر:

الانسحاب t الذي شعاعه $\vec{\omega}$, ذو اللاحقه $\omega = 2 + i$.

والتحاكي h الذي مركزه A, ذو اللاحقة $a = 2 + 4i$, والذي نسبته $-\frac{3}{2}$.

والدوران r الذي مركزه B , ذو اللاحقة $b = 1 - i$, وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

لتكن النقطة M ذات اللاحقة z .

1) لتكن النقطة M_1, ذات اللاحقة z_1, صورة M بالانسحاب t .

أعط لاحقة الشعاع $\overrightarrow{MM_1}$, ثم استنتج عبارة z_1 بدلالة z .

2) لتكن النقطة M_2 , ذات اللاحقة z_2, صورة M بالتحاكي h .

اكتب الشعاع $\overrightarrow{AM_2}$ بدلالة الشعاع $\overrightarrow{AM}$, ثم استنتج عبارة z_2 بدلالة z .

3) لتكن النقطة M_3 , ذات اللاحقة z_3, صورة M بالدوران r .

عين $\frac{BM_3}{BM}$ و $\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BM_3}\right)$, ثم استنتج طويلة العدد $\frac{z_3-b}{z-b}$ وعمدة له , ثم استنتج عبارة z_3 بدلالة z .

4) استعمل النتائج السابقة لإيجاد لواحق صور النقطة O بالانسحاب t وبالتحاكي h والدوران r .

الحل

1) بما أن M_1 صورة M بالانسحاب t فإن $\overrightarrow{MM_1}=\vec{\omega}$ وبالتالي لاحقة الشعاع $\overrightarrow{MM_1}$ هي لاحقة الشعاع $\vec{\omega}$ وبالتالي لاحقة $\overrightarrow{MM_1}$ هي $\omega=2+i$.

وبما أن لاحقة M_1 هي z_1 ولاحقة M هي z فإن $z_1=z+\omega$.

2) بما أن M_2 صورة M بالتحاكي h فإن $\overrightarrow{AM_2}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AM}$ وبالتالي

$z_2-a=-\frac{3}{2}(z-a)$ أي أن $z_2=-\frac{3}{2}(z-a)+a=-\frac{3}{2}z+\frac{5}{2}a$ ومنه

$$z_2=-\frac{3}{2}z+\frac{5}{2}(2+4i)=-\frac{3}{2}z+5+10i$$

3) بما أن M_3 صورة M بالدوران r فإن $\begin{cases} BM_3=BM \\ \left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BM_3}\right)=\frac{\pi}{3}\end{cases}$

وبالتالي $\begin{cases} \frac{BM_3}{BM}=1 \\ \left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BM_3}\right)=\frac{\pi}{3}\end{cases}$.

بما أن $\frac{BM_3}{BM}=1$ فإن طويلة العدد $\frac{z_3-b}{z-b}$ هي 1 .

وبما أن $\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BM_3}\right)=\frac{\pi}{3}$ فإن $\arg\left(\frac{z_3-b}{z-b}\right)=\frac{\pi}{2}$. وإذن $\frac{z_3-b}{z-b}=e^{i\frac{\pi}{2}}=i$

$z_3=i(z-b)+b=i(z-1+i)+1-i=iz-2i$ ومنه

4) إن لاحقة النقطة O هي $z_O=0$.

لاحقة صورة O بالانسحاب t هي : $z_O+\omega=0+2+i=2+i$.

لاحقة صورة O بالتحاكي h هي : $-\frac{3}{2}z_O+5+10i=5+10i$.

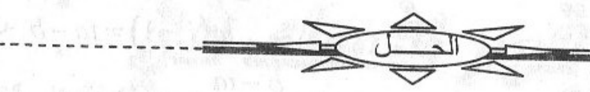
لاحقة صورة O بالدوران r هي : $iz_O-2i=-2i$.

التمرين133

في المستوي المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$, تعرف على التحويل النقطي الذي يرفق بالنقطة M ذات اللاحقة z , النقطة M' ذات اللاحقة z' .

$z'-i=2(z-i)$, $z'=-z$, $z'=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)z$, $z'=z-3+2i$

$z'+1=iz+i$, $z'=-iz$



الحل

$z'=z-3+2i$ بما أن عبارة z' مكتوبة على الشكل $z+b$ فإن التحول هو انسحاب لاحقة شعاعه $-3+2i$.

$z'=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)z$ بما أن $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)=e^{i\frac{\pi}{4}}$ (الانتقال من الجبري إلى المثلثي)

فإن $z'-0=e^{i\frac{\pi}{4}}(z-0)$ وبالتالي التحويل هو دوران زاويته $\frac{\pi}{4}$ ومركزه O .

$z'=-z$ أي أن $z'-0=-(z-0)$ وبالتالي التحويل هو تحاك نسبته -1 ومركزه O.

$z'-i=2(z-i)$ هو تحاك نسبته 2 ولاحقة مركزه i .

$z'=-iz$ أي أن $z'-0=e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}(z-0)$ وبالتالي التحويل هو دوران زاويته $-\frac{\pi}{2}$ ومركزه O .

$z'+1=iz+i$ أي أن $z'+1=i(z+1)=e^{i\frac{\pi}{2}}(z+1)$

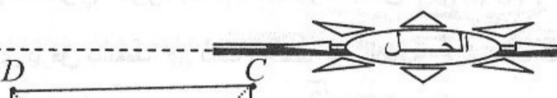
ومنه $z'+1=e^{i\frac{\pi}{2}}(z+1)$ وبالتالي التحويل هو دوران زاويته $\frac{\pi}{2}$ ولاحقة مركزه -1.

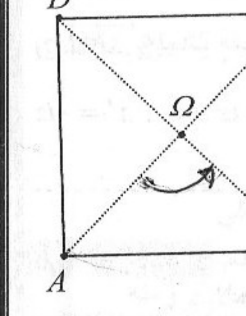
التمرين134

تعطى النقطتان A و B , لاحقتاهما – على الترتيب – : a و b .

ارسم المربع $ABCD$ في الاتجاه المباشر (عكس عقارب الساعة) .

ما هي ω لاحقة Ω مركز المربع $ABCD$ ؟



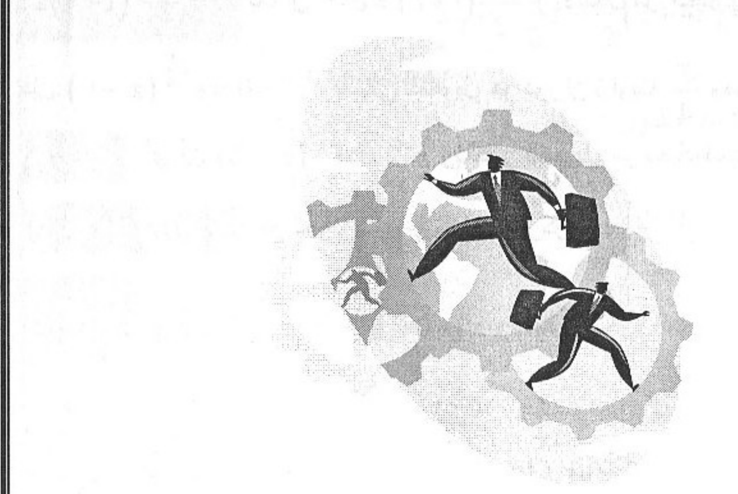


يكفي أن نلاحظ أن النقطة B هي صورة النقطة A بالدوران

الذي مركزه Ω وزاويته $\frac{\pi}{2}$ أي أن : $b-\omega=i(a-\omega)$

ومنه $\omega(i-1)=ia-b$.

وبالتالي لاحقة Ω هي: $\omega=\frac{b-ia}{1-i}$





قوم نفسك في الأعداد المركبة

التمرين 1 **5 نقاط**

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة $z^2-2z+2=0$
2. لتكن K ، L ، M نقطا لاحقاتها ، على الترتيب ، هي :

$z_M=-i\sqrt{3}$ ، $z_L=1-i$ ، $z_K=1+i$

علّمْ (ارسم) هذه النقط في المستوي المباشر المزود بمعلم متعامد ومتجانس $\left(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$.
وحدة الرسم $2cm$. سنكمل الشكل في الأسئلة الموالية .

3. a) لتكن النقطة N نظيرة النقطة M بالنسبة للنقطة L .
تحقق من أن لاحقة النقطة N هي $z_N=2+i\left(\sqrt{3}-2\right)$.
b) ليكن الدوران r الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$ والذي يحول النقطة M إلى النقطة A
ويحول النقطة N إلى النقطة C.
عين لاحقة صورة النقطة L بهذا الدوران r .
c) ليكن الانسحاب t الذي شعاعه $\vec{u}$ ذو اللاحقة $2i$ والذي يحول النقطة M إلى النقطة D ويحول النقطة N إلى النقطة B .
عين z_D و z_B لاحقتي النقطتين D و B .
عين لاحقة صورة النقطة L بهذا الانسحاب t .

4. a) بين أن $\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=i$. ماذا تستنتج فيما يتعلق بالمثلث ABC ؟
b) ما هي طبيعة الرباعي $ABCD$ ؟

التمرين2 **5 نقاط**

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{C}-\{-i\}$ كما يلي : $f(z)=\frac{z-2i}{z+i}$

1. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E):f(z)=-\frac{4i}{z}$ وليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة (E)
2. اكتب z_1 و z_2 على الشكل المثلثي ثم بين أن : $\left(\frac{z_1}{2}\right)^{2007}+\left(\frac{z_2}{2}\right)^{2007}=0$
3. في المستوي المباشر المزود بمعلم متعامد ومتجانس $\left(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$.
a) عين مجموعة النقط M التي لاحقتها z تحقق $\text{Re}(f(z))=0$.

($f(z)$ الجزء الحقيقي للعدد : $\text{Re}(f(z))$)

b) نعتبر النقط $A(\sqrt{3}-i)$ ، $B(-\sqrt{3}-i)$ ، $C(i\alpha)$ حيث α عدد حقيقي موجب

عين قيمة العدد α بحيث يكون ABC مثلثا متساوي الأضلاع.

التمرين3

6 نقاط

في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد ومتجانس ومباشر $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$

(وحدة الرسم $2cm$)، تعطى النقط A ، B ، C التي لواحقها على الترتيب :

$$a=2 \ , \ b=1-i\sqrt{3} \ , \ c=2+2i$$

من أجل كل نقطة M من المستوي , لاحقتها z ، نعتبر النقطة M_1 صورة النقطة M بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$ ونعتبر النقطة M' ذات اللاحقة z' صورة M_1 بالانسحاب الذي شعاعه $-2\vec{e_1}$.

أخيرا نرمز بالرمز T للتحويل الذي يرفق بكل نقطة M النقطة M' .

1.a) اكتب العدد b على الشكل الأسي .

b) علم النقطتين A و C ثم أنشئ النقطة B ثم النقطة C' صورة C بالتحويل T.

2.a) برهن أنه من أجل كل عدد مركب z : $z'=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z-2$

b) عين c' لاحقة C'.

c) عين الشكل الجبري للعدد $\frac{c'}{c}$.

d) استنتنتج أن المثلث OCC' قائم . احسب مساحته بـ cm^2 .

e) عين النقطة التي صورتها O بالتحويل T .

3. نضع $z=x+iy$ ، حيث x و y عددان حقيقيان .

a) من اجل كل عدد مركب z غير معدوم ، اكتب ، بدلالة x و y ، الجزء الحقيقي للعدد $\frac{z'}{z}$.

b) عين (E) مجموعة نقط المستوي M ، بحيث يكون المثلث OMM' قائما في O .

ارسم (E).

التمرين4

6 نقاط

في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد ومتجانس ومباشر $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$

(وحدة الرسم $1cm$)، تعطى النقط A_1 ، A_2 ، A_3 التي لواحقها على الترتيب :

$$z_0=5-4i \ , \ z_1=-1-4i \ , \ z_2=-4-i$$

1.a) تحقق من وجود تشابة مباشر وحيد S ، بحيث : $S(A_0)=A_1$ و $S(A_1)=A_2$.

b) تأكد من أن الكتابة المركبة لـ S هي : $z'=\frac{1-i}{2}z+\frac{-3+i}{2}$

c) استنتج نسبة وزاوية التشابه S و ω لاحقة مركزه Ω .

d) نعتبر نقطة M لاحقتها z مع $z\neq 0$ وصورتها M' لاحقتها z'.

تحقق من العلاقة $\omega-z'=i(z-z')$. استنتج طبيعة المثلث $\Omega MM'$

2. من أجل كل عدد طبيعي n ، نعرف النقطة A_{n+1} كما يلي : $A_{n+1}=S(A_n)$

ونضع $u_n=A_nA_{n+1}$.

a) علم النقط A_0 , A_1 ، A_2 و أنشئ هندسيا النقط A_3 , A_4 ، A_5 ، A_6.

b) برهن أن المتتالية (u_n) هندسية.

3. (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0+u_1+...+u_n=\sum_{k=0}^{n}u_k$

a) اكتب v_n بدلالة n .

b) هل المتتالية (v_n) متباعدة ؟

4.a) احسب r_n نصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ΩA_nA_{n+1} ، بدلالة n .

b) عين أصغر عدد طبيعي p ، بحيث من أجل كل عدد طبيعي n :

إذا كان $n>p$ فإن $r_n<10^{-2}$.

التمرين5

5 نقاط

في المستوي المباشر المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$

(وحدة الرسم $8cm$)، نعتبر النقطة M_0 ذات اللاحقة $z_0=1$

لتكن النقطة M_1 ذات اللاحقة $z_1=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}z_0$ والنقطة M_2 ذات اللاحقة $z_2=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}z_1$

والنقطة M_3 ذات اللاحقة $z_3=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}z_2$ وبشكل عام نعتبر النقطة M_{n+1} ذات اللاحقة $z_{n+1}=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}z_n$ حيث n عدد طبيعي .

1. عين الطويلة و عمدة لكل من الأعداد z_1 ، z_2 ، z_3 ثم علم النقط M_1 ، M_2 ، M_3 .
2. من أجل كل عدد طبيعي n نرمز بالرمز ρ_n لطويلة العدد z_n .

a) عين طبيعة المتتالية (ρ_n) .

b) احسب المجموع $S_n=OM_0+OM_1+...+OM_n$ ، بدلالة n .

c) عين نهاية S_n عندما تنتهي n إلى $+\infty$.

3. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $z_{n+1}+z_n=i\sqrt{3}z_{n+1}$

استنتج أن المثلث OM_nM_{n+1} قائم في M_{n+1} .

التمرين6 — 4 نقاط

المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$

ليكن العدد المركب $z=x+iy$ حيث $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ ولتكن النقطة M صورة z .

نضع $U=\frac{-iz+3-4i}{z-i}$

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $U=z$.

2) بين أن $\text{Re}(U)=\frac{4x-4y+4}{x^2+(y-1)^2}$ (الجزء الحقيقي للعددU)

و $\text{Im}(U)=\frac{-(x^2+y^2+4x+2y-3)}{x^2+(y-1)^2}$ (الجزء التخيلي للعددU)

3) عين ثم أنشئ المجموعتين :

$$(E)=\{M_{(z)}/U\in\mathbb{R}\} \quad ، \quad (F)=\{M_{(z)}/U\in i\mathbb{R}\}$$

4) ليكن العدد المركب z الذي طويلته $\sqrt{3}-1$ و $\frac{\pi}{3}$ عمدة له .

أ ـ تحقق أن $1-z=\frac{1}{2}(3-\sqrt{3})(1-i)$

ب ـ احسب طويلة $(1-z)$ وعمدة له.

ج ـ لتكن A و B و C ثلاث نقط لواحقها على الترتيب : 1 و z و $1-z$

بين أن الرباعي $OBAC$ متوازي أضلاع .

التمرين7 — 3.5 نقاط

1) أ ـ عين الجذرين التربيعيين للعدد المركب i .

ب ـ اكتب هذين الجذرين على الشكل المثلثي.

2) نعتبر في $\mathbb{C}$ كثير الحدود : $P(z)=z^3-(2+i)z^2+(1+i)z-(1+i)$

أ ـ بين أن المعادلة $P(z)=0$ تقبل حلا تخيليا صرفا z_1 يطلب تحديده.

ب ـ تحقق من أنه من أجل كل عدد مركب z : $P(z)=(z-z_1)(z^2-2z+1-i)$

ج ـ حل المعادلة $(E):P(z)=0$.

نسمي z_2 ، حل المعادلة (E) بحيث $\text{Im}(z_2)>0$

و نسمي z_3 ، حل المعادلة (E) بحيث $\text{Im}(z_3)<0$

3) أ ـ بين أن : $z_2=\left[2\cos\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{8}\right]$ ، $z_3=\left[2\cos\frac{3\pi}{8},\frac{-3\pi}{8}\right]$

ب ـ استنتج قيمتي $\cos\frac{3\pi}{8}$ و $\sin\frac{3\pi}{8}$.

ج ـ لتكن n من $\mathbb{Z}$ عين قيم n بحيث يكون العدد $(z_1)^n$ حقيقي .

التمرين8 — 3 نقاط

المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$

نعتبر العددين المركبين $a=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $b=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$ لاحقتي النقطتين A، B

1ـ أثبت أن A و B تنتميان للدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 1.

2ـ أ) تحقق من أن $a^2=-1-a=\bar{a}$ و $a^3=1$ ($\bar{a}$ هو مرافق العدد a)

ب) اكتب على الشكل المثلثي الأعداد : b ، ab ، a^2b .

3ـ لتكن C ، D صورتي العددين ab و a^2b على التوالي

أ) عين قيسي الزاويتين $(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC})$ ، $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD})$

ب) استنتج أن المثلث DCB متساوي الأضلاع .

4ـ أ) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2+bz+b^2=0$

ب) استنتج حلول المعادلة :

في $\mathbb{C}$: $(E): z^3 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = 0$.

التمرين9 **5 نقاط**

الجزء A المستوي المركب مزود بمعلم متعامد ومتجانس مباشر $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$

من أجل رسم الشكل نأخذ كوحدة رسم $1cm$.

لتكن P النقطة التي لاحقتها p حيث $p=10$. ولتكن Γ الدائرة التي قطرها $[OP]$

نرمز بالرمز Ω لمركز الدائرة Γ .

لتكن النقط A ، B ، C التي لواحقها على الترتيب a ، b و c حيث :

$a=5+5i$ ، $b=1+3i$ و $c=8-4i$

1. برهن أن النقط A ، B ، C من الدائرة Γ .
2. لتكن D النقطة التي لاحقتها $2+2i$.
برهن أن D هي المسقط العمودي للنقطة O على المستقيم (BC)

الجزء B من أجل كل نقطة M من المستوي تختلف على O ، لاحقتها z نرفق بها النقطة M' ذات اللاحقة z' بحيث : $z'=\frac{20}{\bar{z}}$ ، مع $\bar{z}$ هو مرافق z .

1. برهن أن النقط : O ، M ، M' على استقامة واحدة .
2. ليكن Δ المستقيم الذي معادلته $x=2$ ولتكن M نقطة من Δ لاحقتها z .
نقترح تعريف النقطة M' المرفقة بالنقطة M هندسيا

a) تحقق من أن $z+\bar{z}=4$.

b) اكتب $z'+\overline{z'}$ بدلالة z و $\bar{z}$ ثم استنتج أن $5\left(z'+\overline{z'}\right)=z'\overline{z'}$.

c) استنتج أن M' تنتمي إلى تقاطع المستقيم (OM) مع الدائرة Γ .

علم M' على الشكل.

التمرين10 **5 نقاط**

في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد ومتجانس ومباشر $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$

(وحدة الرسم $2cm$)،نعتبر النقط A ، B ، C التي لواحقها على الترتيب :

$z_C=1-i\sqrt{3}$, $z_B=1-i\sqrt{3}$, $z_A=2$

الجزء: أ

1. a) أعط الشكل الأسي للعدد z_B ثم للعدد z_C .

b) علّم النقط A ، B ، C .

2. عين طبيعة الرباعي $OBAC$.
3. عين وأنشئ $\mathscr{D}$ مجموعة النقط M من المستوي بحيث $|z|=|z-2|$.

الجزء: ب

من أجل كل نقطة M لاحقتها z بحيث $z\neq z_A$ ، نرفق بها النقطة M' ذات اللاحقة z' المعرفة كما يلي : $z'=\frac{-4}{z-2}$.

1.a) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z=\frac{-4}{z-2}$.

b) استنتج النقطتين المرفقتين بالنقطتين B و C .

c) عين وعلم G' النقطة المرفقة بمركز ثقل المثلث OAB .

2.a) **سؤال من الدرس :**

علمت أن طويلة عدد مركب كيفي z ، يرمز إليها بالرمز $|z|$

ولدينا $|z|^2=z\bar{z}$ حيث $\bar{z}$ هو مرافق z .

برهن أن :

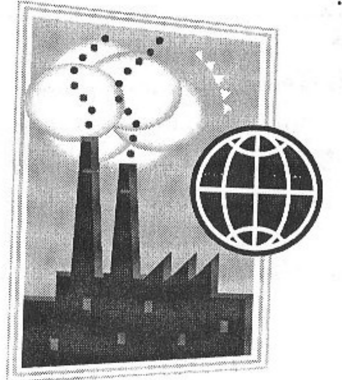
- من أجل كل عددين مركبين z_1 و z_2 ، $|z_1\times z_2|=|z_1|\times|z_2|$.
- من أجل كل عدد مركب غير معدوم z ، $\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}$.

b) برهن أنه من أجل كل عدد مركب يختلف عن 2 ،

$$|z'-2|=\frac{2|z|}{|z-2|}$$

c) نفرض ، في هذا السؤال، أن M نقطة كيفية من $\mathscr{D}$ حيث $\mathscr{D}$ هي المجموعة المعرفة في السؤال 3 من الجزء أ .

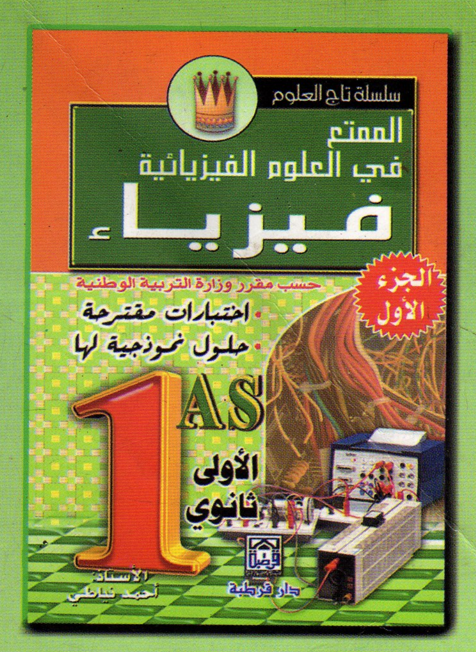
برهن أن النقطة M' المرفقة بـ M تنتمي إلى دائرة Γ ، يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها . ارسم Γ .

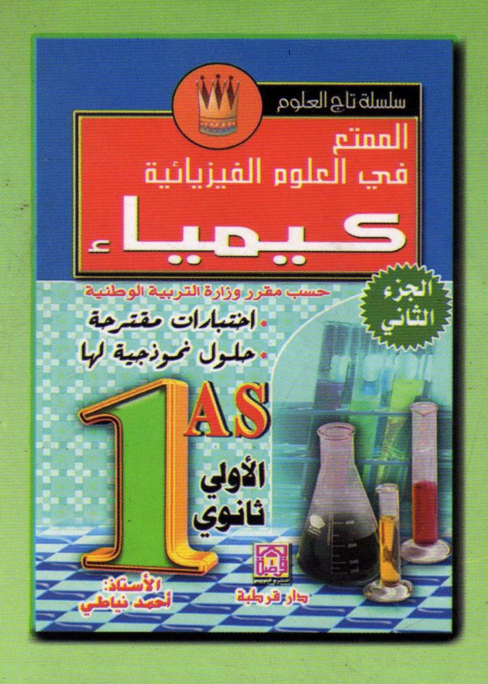


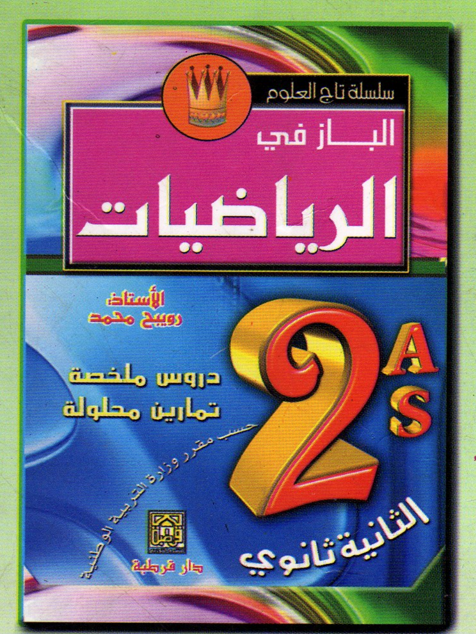
الفهرس

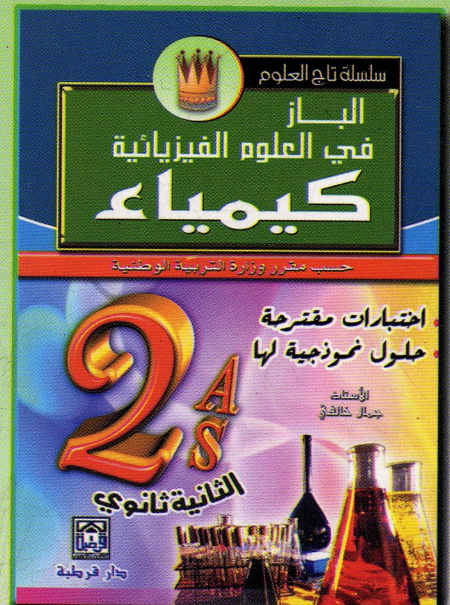
المتتاليات

الأعداد المركبة


سلسلة تاج العلوم
الممتع
في العلوم الفيزيائية
فيزياء
الجزء الأول
حسب مقرر وزارة التربية الوطنية
احتبارات مقترحة
حلول نموذجية لها
1AS
الأولى ثانوي
دار قرطبة


سلسلة تاج العلوم
الممتع
في العلوم الفيزيائية
كيمياء
الجزء الثاني
حسب مقرر وزارة التربية الوطنية
احتبارات مقترحة
حلول نموذجية لها
1AS
الأولى ثانوي
الأستاذ: أحمد نياطي
دار قرطبة


سلسلة تاج العلوم
الباز في
الرياضيات
الأستاذ: رويبح محمد
دروس ملخصة
تمارين محلولة
2AS
الثانية ثانوي
دار قرطبة


سلسلة تاج العلوم
الباز
في العلوم الفيزيائية
كيمياء
حسب مقرر وزارة التربية الوطنية
احتبارات مقترحة
حلول نموذجية لها
2AS
الثانية ثانوي
دار قرطبة



دار قرطبة